Übung Mathematik 3 für BI

Beispiele für 16.10.2014

1. Parametrisieren und skizzieren Sie folgende Flächen im $\mathbb{R}^3$:

   (a) Kreis in der y, z Ebene mit Mittelpunkt $(0/1/2)$ und Radius $r = 3$,

   (b) Dreieck mit den Eckpunkten $(1/0/0)$, $(0/1/0)$ und $(0/0/1)$,

   (c) Kreis in der Ebene $E : x + y + z = 1$ mit Mittelpunkt $(1/0/0)$ und Radius $r = 1$,

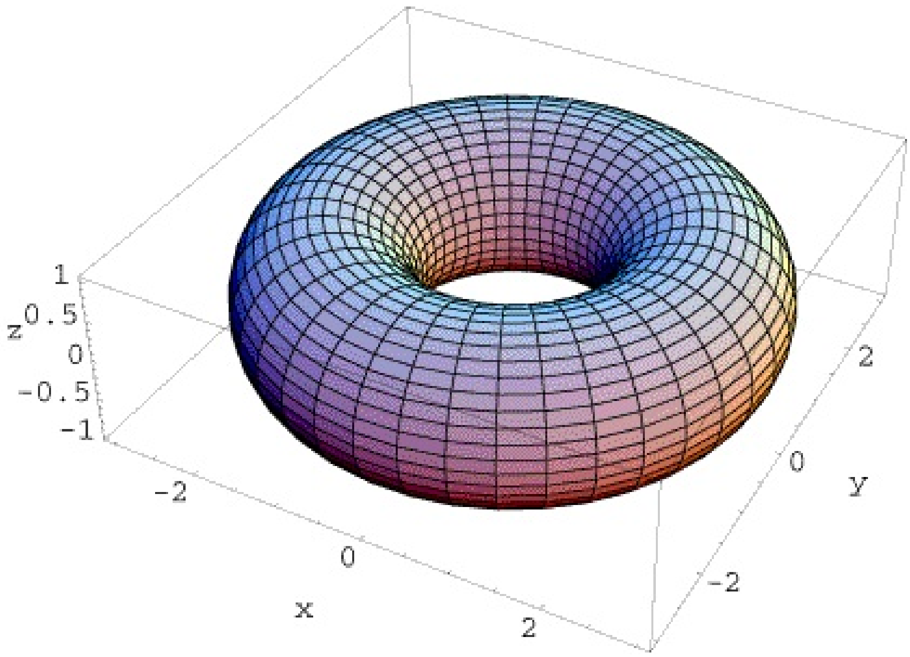
   (d) Kegelmantel des (Doppel)-Kegels um die z-Achse mit Spitze im Ursprung und Öffnungswinkel $45°$,

   (e) Kegelmantel des (Doppel)-Kegels um die Gerade $g : (1/0/0) + t(1/1/1)$ mit Spitze im Punkt $(1/0/0)$ und Öffnungswinkel $45°$.

2. Geben Sie für die Flächen aus Aufgabe 1 in jedem Flächenpunkt jeweils Normalvektor, vektorielles Oberflächenelement $d\mathbf{O}$ sowie skalares Oberflächenelement dO an.

   Zur Erinnerung: Wenn $\mathbf{n}$ ein normierter Normalvektor ist, dann besteht zwischen vektoriellem und skalarem Oberflächenelement die Beziehung $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{O} = dO$.

3. Parametrisieren Sie den Torus mit den $R > r$ (siehe Skizze) in (ϕ, θ, ρ) Koordinaten. Geben Sie Oberflächen- und Volumselemente an und berechnen Sie Oberfläche und Volumen des Torus!



   Ergebnis: $O = 4\pi^2 rR$, $V = 2\pi^2 r^2 R$

   Zur Erinnerung: Wenn $T(\phi, \theta, \rho)$ die Transformation von (ϕ, θ, ρ)-Koordinaten in kartesische $(x, y, z)-$Koordinaten ist, dann gilt für das Volumselement (Funktionaldeterminate!)

$$dV = \left| \det \frac{\partial T(\phi, \theta, \rho)}{\partial(\phi, \theta, \rho)} \right| d\phi \, d\theta \, d\rho.$$

4. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld in Polarkoordinaten, d.h. $\phi = \phi(r, \theta)$ mit $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$. Dann ist der Gradient von ϕ gegeben durch

$$\nabla\phi(r,\theta) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \ldots\right) = \left(\phi_r\cos\theta - \tfrac{1}{r}\phi_\theta\sin\theta, \ldots\right)$$

   (a) Berechnen Sie die fehlende Komponente von $\nabla\phi$.

   (b) Berechnen Sie $\Delta\phi$.

5. Bestimmen Sie alle Skalarfelder $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ welche $\Delta\phi = 0$ erfüllen und nicht vom Polarwinkel θ abhängen. Skizzieren Sie jeweils auch das Gradientenfeld $\nabla\phi$.

6. Bestimmen Sie alle Skalarfelder $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{o\} \to \mathbb{R}$ welche $\Delta\phi = 0$ erfüllen und nicht vom Polarwinkel θ abhängen. Skizzieren Sie jeweils auch das Gradientenfeld $\nabla\phi$. Was könnte der Grund für das in Hinblick auf Aufgabe 5 vielleicht unerwartete Ergebnis sein?

7. Berechnen Sie durch Parametrisieren der Kurve das Integral $\oint_C \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(s))ds$ direkt. Dabei ist

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}$$

   und C der im positiven Sinne durchlaufene Umfang des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

8. Formulieren Sie den Satz von Stokes und berechnen Sie mit dessen Hilfe das Kurvenintegral aus Aufgabe 7 nochmals.

   Berechnen Sie ferner die Komponenten des Vektorfeld $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$, wobei der $\boldsymbol{a}$ der (feste) Vektor $(1,1,1)$ ist, und versuchen Sie eine physikalische Interpretation des gerade berechneten Kurvenintegrals!