1. Übungsblatt – Mathematik 3 für Bauingenieure

Wintersemester 2017/18

Beispiel 1

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt und C ein Kreis mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt in z_0 (mathematisch positiv durchlaufen). Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ das Integral

$$\int_C (z - z_0)^n \, dz.$$

Beispiel 2

Skizzieren Sie die folgenden Kurven für $0 \leq t \leq 1$.

(a) $\gamma(t) = 1 + it$ (b) $\gamma(t) = e^{-\pi it}$

(c) $\gamma(t) = e^{\pi it}$ (d) $\gamma(t) = 1 + it + t^2$

Bestimmen Sie die Kurvenintegrale folgender Funktionen über jede der Kurven (a) bis (d).

(i) $f(z) = z^2$ (ii) $f(z) = \overline{z}$ (iii) $f(z) = 1/z$

Beispiel 3

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $c > 0$ eine positive reelle Zahl. Es bezeichne $\alpha = z_0 + x$ und $\alpha' = z_0 - x$, wobei $x > 0$ reell und positiv ist. Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 0} \int_\sigma \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha'} \right) dz,$$

wobei σ das vertikale Segment ist, parametrisiert durch

$$\sigma(t) = z_0 + itc, \qquad -1 \leq t \leq 1.$$

Beispiel 4

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen bei $z = 0$:

(a) $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^3-5)}$ (b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$

(c) $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$ (d) $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^2}$

Beispiel 5
Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an ihren Polstellen:

(a) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ (b) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ (c) $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$

Beispiel 6
Gegeben sei die Rechteckskurve C mit Eckpunkten in 0, 10, $4i$ und $4i + 10$ (mathematisch positiv durchlaufen). Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_C \frac{1}{z^2-3z+5}\, dz$ (b) $\int_C \frac{1}{z^2+z+1}\, dz$ (c) $\int_C \frac{1}{z^2-z+1}\, dz$

Beispiel 7
Es sei C die Kreiskurve mit Radius 8 und Mittelpunkt im Ursprung (mathematisch positiv durchlaufen). Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_C \frac{1}{\sin z}\, dz$ (b) $\int_C \frac{1}{1-\cos z}\, dz$ (c) $\int_C \frac{1+z}{1-e^z}\, dz$

Beispiel 8
Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$

indem Sie jeweils über eine (mathematisch positiv durchlaufene) Halbkreiskurve in der oberen Halbebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R integrieren und dann den Grenzwert $R \to \infty$ bilden.

Beispiel 9
Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1}\, dx$$

indem Sie jeweils über eine (mathematisch positiv durchlaufene) Rechteckskurve mit den Eckpunkten $-R$, R, $R + \pi i$ und $-R + \pi i$ integrieren und dann den Grenzwert $R \to \infty$ bilden.

Bereiten Sie bitte die Übungsbeispiele bis zur nächsten Übung vor, die am 23.11.2017 von 9 bis 11 Uhr stattfindet.
Sprechstunde jeden Deinstag von 9 bis 10 Uhr im 7. Stock, grüner Bereich, Zimmer K22 und nach Vereinbarung. E-mail: olaf.mordhorst@tuwien.ac.at