1. Übungsblatt – Mathematik 3 für Bauingenieure

Wintersemester 2017/18

Beispiel 9 aus der letzten Übung dürfen Sie bearbeiten und nachkreuzen.

Beispiel 10
Auf $C[-1,1]$ sei das folgende innere Produkt gegeben

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,x^2\,dx.$$

(a) Betrachten Sie den von $\{1,x\}$ aufgespannten Unterraum U von $C[-1,1]$ und entscheiden Sie ob $\{1,x\}$

○ eine Orthonormalbasis von U ist; ○ nicht orthogonal sind;

○ eine Orthogonalbasis von U ist; ○ nicht linear unabhängig sind.

(b) Finden Sie Zahlen $a,b,c \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, sodass die Funktion

$$g(x) = a + bx + cx^3$$

orthogonal auf den von $\{1,x\}$ aufgespannten Unterraum U steht.

(c) Finden Sie Zahlen $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, sodass der Ausdruck $\int_{-1}^{1} (\lambda + \mu x - x^2)^2 x^2\,dx$ minimal wird.

Beispiel 11
Auf $C[-1,1]$ sei das folgende innere Produkt gegeben

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,|x|\,dx.$$

(a) Betrachten Sie den von $\{x,x^2\}$ aufgespannten Unterraum U von $C[-1,1]$ und entscheiden Sie ob $\{x,x^2\}$

○ eine Orthonormalbasis von U ist; ○ linear unabhängig aber nicht orthogonal sind;

○ eine Orthogonalbasis von U ist; ○ nicht linear unabhängig sind.

(b) Finden Sie Zahlen $a,b,c \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, sodass die Funktion

$$g(x) = ax + bx^2 + cx^3$$

orthogonal auf den von $\{x,x^2\}$ aufgespannten Unterraum steht.

(c) Finden Sie Zahlen $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, sodass folgender Ausdruck minimal wird

$$\int_{-1}^{1} (\lambda x + \mu x^2 - 1)^2\,|x|\,dx.$$

Beispiel 12

Auf dem Intervall $[-\pi, 0)$ sei die Funktion $f(x) = x$ gegeben.

(a) Setzen Sie f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine gewöhnliche Fourierreihe.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung den Wert der Reihe

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

wobei a_k und b_k die Fourierkoeffizienten aus (a) bezeichnen.

(c) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet.
Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe aus (a) an $x = 17\pi$ und $x = 1$?

Beispiel 13

Auf dem Intervall $[-2, 0)$ sei die Funktion $f(x) = -x$ gegeben.

(a) Setzen Sie f zunächst *gerade* auf $[-2, 2]$ und dann periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine gewöhnliche Fourierreihe.

(c) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet.
Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe aus (a) an $x = 17$ und $x = 42$?

Beispiel 14

Auf dem Intervall $[0, 6)$ sei die folgende Funktion gegeben

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 3, \\ 0 & \text{für } 3 \leq x < 6. \end{cases}$$

(a) Setzen Sie f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine gewöhnliche Fourierreihe.

(c) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet.
Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe aus (a) an $x = 21$ und $x = 22$?

Beispiel 15

Auf dem Intervall $[0, \pi)$ sei die folgende Funktion gegeben

$$f(x) = \sin x.$$

(a) Setzen Sie f periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine gewöhnliche Fourierreihe.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung den Wert der Reihe $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$, wobei a_k und b_k die Fourierkoeffizienten aus (a) bezeichnen.

(c) Formulieren Sie den Satz von Dirichlet.
Gegen welchen Wert konvergiert die Fouriereihe aus (a) an $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = 17\pi$?

Bereiten Sie bitte die Übungsbeispiele bis zur nächsten Übung vor, die am 06.11.2017 von 9 bis 11 Uhr stattfindet.
Sprechstunde jeden Deinstag von 9 bis 10 Uhr im 7. Stock, grüner Bereich, Zimmer K22 und nach Vereinbarung. E-mail: olaf.mordhorst@tuwien.ac.at