Merkblatt für die Vorlesungsprüfung zu Mathematik 3 im Wintersemester 2019/2020

Die Vorlesungsprüfung dauert 90 Minuten. Bitte schreiben Sie mit blauer oder schwarzer Tinte. Das Papier wird gestellt. Die Klausur richtet sich von der Form und dem Inhalt nach den Vorlesungsprüfungen von früheren Semestern (ab Wintersemester 2015). Diese sind abrufbar auf der Seite `dmg.tuwien.ac.at/ludwig/`, Unterpunkt Teaching, Unterpunkt Prüfungsangaben.

Als Hilfsmittel ist eine unbeschriebene Formelsammlung zugelassen, die im Sekretariat des Instituts für diskrete Mathematik und Konvexgeometrie erhältlich ist. Diese enthält eine Liste mit Laplacetransformationen.

Es wird vier Aufgaben geben. Es wird erwartet, dass Sie die Beispiele am Ende des Skriptums sicher beherrschen, ausgenommen sind wegen Ihrer Komplexität die Beispiele 4, 7, 13, 16, 17, 18, 42. Neben der Fertigkeit, Beispiele zu rechnen, werden auch Fragen zum Verständnis der Vorlesung gestellt. Insbesondere werden auch Definitionen und Sätze und Beweise abgefragt. Im Folgenden ist eine Liste dazu zusammengestellt:

Zu Kapitel 12: Komplexe Funktionentheorie

1. Definieren Sie, was holomorph ist. (S. 2)
2. Leiten Sie aus der Definition der Holomorphie die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen her. (S. 3)
3. Zeigen Sie, dass für eine holomorphe Funktion die Bilder von orthogonalen Geraden ($x =$ const und $y =$ const) orthogonale Kurven sind. (S. 4)
4. Beweisen Sie, dass für eine holomorphe Funktion $f = u + iv$ gilt, dass u und v (konjugiert) harmonisch sind, d.h., es gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $v_{xx} + v_{yy} = 0$. (S. 5)
5. Formulieren Sie den Satz von Goursat. (S. 12)
6. Beweisen Sie für einfach geschlossene, positiv orientierte Integrationswege den Satz von Goursat. (S. 12)
7. Was ist unter Wegunabhängigkeit komplexer Kurvenintegrale zu verstehen? (S. 14)
8. Was besagt die Integralformel von Cauchy? (S. 16)
9. Beweisen Sie die Integralformel von Cauchy. (S. 16)
10. Was besagt der Satz über die Mittelwerteigenschaft analytischer/holomorpher Funktionen? (S. 16)
11. Beweisen Sie den Satz über die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen. (S. 16)
12. Was ist eine Laurentreihe? (S. 17)
13. Was ist ein Pol m-ter Ordnung? (S. 18)
14. Definieren Sie das Residuum einer Funktion (Definition, nicht Berechnungsformel!). (S. 18)
15. Was besagt der Residuensatz? (S. 19)

Zu Kapitel 13: Fourierreihen, Orthogonale Funktionensysteme

1. Was ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt? Wie ist die vom Skalarprodukt induzierte Norm definiert? (S. 24/25)

2. Was ist ...orthogonal... orthonormal...ein Orthogonalsystem...ein Orthonormalsystem? (S. 25)

3. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und induzierter Norm $\|\ \|$, $f \in V$ und $\phi_1, \dots, \phi_m$ ein Orthonormalsystem. Wie müssen Sie $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ wählen, damit $c_1\phi_1 + \cdots + c_m\phi_m$ die Bestapproximation/Fourierapproximierende von f bezüglich $\|\ \|$ ist? Beweisen Sie Ihre Aussage. Formulieren und zeigen Sie die Besselsche Ungleichung. Was besagt die Parsevalsche Gleichung und wann gilt sie? (S. 26/27)

4. Wie ist die Gramsche Matrix für eine endliche Folge von Vektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? (S. 29)

5. Was sind gewöhnliche Fourierreihen? Bezüglich welchen Skalarprodukts sind die Basisfunktionen orthogonal zueinander? Wie sehen die Fourierkoeffizienten bezüglich einer Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ aus? (S. 30/31)

6. Formulieren Sie beide Varianten des Satzes von Dirichlet. (S. 34)

7. Formulieren Sie das Sturm–Liouvillesche Eigenwertproblem. Definieren Sie das zugehörige innere Produkt. (S. 35)

8. Zeigen Sie für das Sturm–Liouvillesche Eigenwertproblem, dass die Eigenwerte reell sind und dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind. (S. 36)

Zu Kapitel 14: Integraltransformationen

1. Wie ist die Laplacetransformation definiert? (S. 43)

2. Was besagt der Satz zur Existenz der Laplacetransformation? (S. 44)

3. Sei F auf $\mathbb{C}$ analytisch bis auf endliche viele Polstellen. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Funktion f mit $F = \mathcal{L}\{f\}$? Wie berechnet man f? (S. 45)

4. Beweisen Sie für die Laplacetransformation die Formel für...die Ableitung...die Integration...die Verschiebung...den 2. Verschiebungssatz. (S. 46–48)

5. Wie ist die Faltung $*$ zweier Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert. Beweisen Sie, dass $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$ ist. (S. 48)

6. Wie ist die Fouriertransformation definiert? (S. 55)

7. Was besagt der Satz zur Existenz der Fouriertransformierten? (S. 55)

8. Wie ist die Sinus- und Cosinustransformation definiert? Erklären Sie den Zusammenhang zur Fouriertransformation. Formulieren Sie die Fouriersche Umkehrformel mit der Sinus- und Cosinustransformation. (S. 56–58)

Zu Kapitel 15: Lineare partielle Differentialgleichungen

1. Was ist eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung und 2. Ordnung? Wann heißen diese homogen? (S. 61/62)

2. Was ist die Rumpfdifferentialgleichungen einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung? (S. 65)

3. Zeigen Sie, dass eine stetig differenzierbare Funktion u genau dann Lösung der Rumpfdifferentialgleichung ist, wenn u auf Charakteristiken konstant ist. (S. 65/66)

4. Wie ist elliptisch, parabolisch, hyperbolisch für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert? Geben Sie Beispiele für diese drei Typen von Differentialgleichungen. (S. 69)

5. Wie wurde in der Vorlesung/im Skript die eindimensionale beschränkte (S. 70)/einseitig unbeschränkte (S. 76)/unbeschränkte (S. 73) Schwingungsgleichung formuliert? Geben Sie auch die Anfangs- und Randwertbedingungen an. Wie sehen die Lösungsformeln für diese Differentialgleichungen aus?

6. Zeigen Sie, dass die Lösung der eindimensionalen Schwingungsgleichung eindeutig ist. (S. 73)

7. Formulieren Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswertbedingung. (S. 77)

8. Leiten Sie die Laplacesche Differentialgleichung in Polarform her (S. 85/86)