1. Beweisen Sie, dass eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ genau dann ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist, wenn sie durch den Ursprung geht.

2. Geben Sie die Normalendarstellung folgender Ebenen in $\mathbb{R}^3$ an

$$E_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\},$$

$$E_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ist eine der beiden Ebenen ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$, und wenn ja warum?

3. Finden Sie die Parameterdarstellung des 2-dimensionalen Unterraums des $\mathbb{R}^3$, welcher senkrecht auf die Gerade

$$g := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

steht.

4. Wir betrachten zwei lineare Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Berechnen Sie den Schnitt $g := U_1 \cap U_2$.

5. Wir betrachten den 4-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Geben Sie jeweils zwei 2- dimensionale Untervektorräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^4$ an so dass:

1. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

2. $U_1 \cap U_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

6. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen $V, W$. Zeigen Sie:

- $\ker(T)$ ist ein Untervektoraum von $V$.
- $\operatorname{Bild}(T)$ ist ein Untervektoraum von $W$.

7. Wir betrachten die reelle projektive Ebene $\mathcal{P}^2 := \big\{[(x_1,x_2,x_3)]\,|\,(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\big\}$ und die Ebene

$$E_3 := \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Zeigen Sie, dass eine Ursprungsgerade $g := \text{span}\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\}$ im $\mathbb{R}^3$ die Ebene $E_3$ genau dann scheidet, wenn $x_3 \neq 0$.

2. Zeigen Sie, falls sich die Ebene $E_3$ und die Gerade $g$ scheiden, so können wir den Richtungsvektor von $g$ so wählen, dass gilt $g := \text{span}\{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und der Schnittpunkt mit der Ebene $E_3$ ist durch $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 1)$ gegeben. Berechnen Sie dafür auch $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$.

8. Wir betrachten drei Ebenen im $\mathbb{R}^3$:

$$E_i := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 |\, x_i = 1\}, \qquad i = 1,2,3$$

und drei Abbildungen $\Phi_i : \mathbb{R}^2 \to E_i$, wobei: $\Phi_1(x,y) := (1,x,y)$, $\Phi_2(x,y) := (x,1,y)$, $\Phi_3(x,y) := (x,y,1)$.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\Phi_i : \mathbb{R}^2 \to E_i$ bijective sind. Es reicht dabei es für eine Abbildung zu zeigen, der Beweis für die beiden anderen funktioniert analog.

2. Wie in der Vorlesung erklärt, können wir die Punkte von der Ebene $E_i$ mit Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^3$ and damit mit Punkten in $\mathcal{P}^2$ identifizieren.

$$(x,y,1) \in E_1 \leftrightarrow [(x,y,1)] \in \mathcal{P}^2$$

Zeigen Sie:

$$\bigcup_{i=1,2,3} \Phi_i(\mathbb{R}^2) = \mathcal{P}^2.$$

9. Wir wählen affine Koordinaten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für die projektive Ebene $\mathcal{P}^2$, so dass

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow [(x,y,1)] \in \mathcal{P}^2,$$

gilt. Wenn nicht explizit anders erwähnt, ist dies von nun an die Standartwahl von affinen Koordinaten. Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten folgender Geraden:

1. Der $x$ und $y$ Achse in $\mathbb{R}^2$.

2. Der Geraden, mit Parameterdarstellung $g = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10. Wir betrachten zwei Geraden in der projektiven Ebene, welche in affinen Koordinaten folgende Form haben:

$$\begin{aligned} g_1 :&\quad -x + 2y = 1 \\ g_2 :&\quad x + 3y = 9 \end{aligned}$$

Bestimme die homogenen Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden $g_1$ und $g_2$.

11. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die homogenen Koordinaten von drei paarweise verschiedenen projektiven Geraden in $\mathcal{P}^2$. Welche geometrische Eigenschaft ist durch die Gleichung

$$\langle u \times v, w \rangle = 0$$

charakterisiert?

12. Zeigen Sie, dass zwei Geraden in der euklidischen Ebene genau dann parallel sind, wenn die entsprechenden Geraden in $\mathcal{P}^2$ durch einen gemeinsamen Fernpunkt gehen.

13. Zeigen Sie, dass für drei Geraden in der projektiven Ebene mit homogenen Geradenkoordinaten $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $u, v, w$ sind linear abhängig.

2. $\det(u, v, w) = 0$.

3. Die drei Geraden sind kopunktal.

14. Seien $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c] \in \mathcal{P}^2$ drei verschiedene Punkte. Beschreiben Sie die Menge

$$\{[x] \in \mathcal{P}^2 | \det(x, a, c) \cdot \det(x, b, c) = 0\}.$$

15. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt:

$$\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(U) \Rightarrow M \subset U.$$

16. Sei $A, B, C \in \mathcal{P}^2$ ein Dreieck und

$$\begin{aligned} A' &\in B \vee C \\ B' &\in A \vee C \\ C' &\in B \vee A \end{aligned}$$

drei Punkte, so dass die drei Punkte $\tilde{A} = (B \vee C) \cap (B' \vee C')$, $\tilde{B} = (C \vee A) \cap (C' \vee A')$, $\tilde{C} = (A \vee B) \cap (A' \vee B')$ kollinear sind.

- Zeichnen Sie eine Skizze der oben beschriebenen Konstelation.
- Zeigen Sie unter der Verwendung des Satzes von Desargues, dass die drei Geraden $A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ kopunktal sind.

17. (4 Punkte) Die folgenden Mengen bezeichnen projektive Geraden in $\mathcal{P}^2$. Dabei werden die Geraden mit homogenen Koordinaten dargestellt. Bei welchen Mengen handelt es sich um ein Geradenbüschel?

1. $B_1 := \{[u(t)] | \, u(t) = (\cos(\frac{\pi}{3}) \sin(t), \sin(\frac{\pi}{3}) \sin(t), \cos(t)), \; t \in \mathbb{R}\}$

2. $B_2 := \{[u(t)] | \, u(t) = (\cos(t) \sin(\frac{\pi}{3}), \sin(t) \sin(\frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{3})), \; t \in \mathbb{R}\}$

3. $B_3 := \{[u(t)] | \, u(t) = (t, 2, 3), \; t \in \mathbb{R}\}$

4. $B_4 := \{[u(t)] | \, u(t) = (t, 2s, 3t), \; (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$

5. $B_5 := \{[u(t)] | \, u(t) = (t, 2s, 3t), \; (s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$

18. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere Menge. Zeigen Sie, dass $[M]$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

19. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $U \cup V$ in der Regel kein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

20. Zeigen Sie, dass für drei projektive Unterräume $G_1, G_2, G_3 \subset \mathcal{P}^n$ gilt:

1. $G_1 \vee G_2 = G_2 \vee G_1$

2. $(G_1 \vee G_2) \vee g_3 = G_1 \vee (G_2 \vee G_3)$

21. Zeigen Sie: Für $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $M^\perp$ ist ein lineare Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

2. $M^\perp = [M]^\perp$

22. (4 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen orthonormal Basis $b = \{e_1, \dots e_n\}$, wobei $e_i := (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ mal}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i \text{ mal}})$. Für den linearer Untervektorraum $U := \text{span}\{e_1, \dots e_k\}$, $k < n$, definieren wir die Abbildung:

$$\begin{aligned} P_U^\perp : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x - \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften von $P_U^\perp$

1. $\text{Bild}(P_U^\perp) = U^\perp$

2. $\ker(P_U^\perp) = U$

3. Finden Sie die Matrix-Darstellung von $P_U^\perp$ bezüglich der Basis $b$.

4. $P_U^\perp(P_U^\perp(x)) = P_U^\perp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

5. Berechnen Sie die Dimension von $U^\perp$.

23. Wir betrachten die Menge der Drehungen im $\mathbb{R}^2$:

$$SO(2) := \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Zeigen Sie, dass $SO(2)$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet.
- Ist die Gruppe abelsch?

**Hinweis:** Additionstheoreme

24. Wir betrachten die Menge der orthogonalen Matrizen:

$$O(n) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \, A^t = A^{-1} \right\}$$

- Zeigen Sie, dass $O(n)$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet.
- Ist die Gruppe für $n > 2$ abelsch?

25. Beweisen Sie, dass die Projektivegruppe, $PGL_n(\mathbb{R})$, eine Gruppe ist. Sie können dabei Lemma 79 aus der Vorlesung verwenden. Zeigen Sie nun, dass die Projektivegruppe nicht abelsch ist.

26. (4 Punkte) Bestimme eine Matrix, die die projektive Transformation darstellt, welche in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ eine

- Drehung um den Punkt $(m_1, m_2)$
- Spiegelung an der $x-$Achse
- Spiegelung an der Gerade mit homogenen Koordinaten $[(0, \cos(\alpha), \sin(\alpha))]$
- Streckung mit Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$
- Scherung mit der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

beschreibt.

27. Seine $P_1 := [(1, 0, 0)]$, $P_2 := [(0, 1, 0)]$ und $P_1 := [(0, 0, 1)]$ drei Punkte in der projektiven Ebene $\mathcal{P}^2$. Finden Sie eine Darstellendematrix für die projektive Transformation $\kappa : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$, welche durch $\kappa(P_1) = P_2, \kappa(P_2) = P_1$, und $\kappa(P_3) = P_3$ definiert ist.

28. Seinen $P_1 := [(0,2,0)], P_2 := [(1,1,0)], P_3 := [(1,1,1)], P_4 := [(0,1,1)]$ vier Punkte in der projektiven Ebene.

1. Zeigen Sie, dass $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ ein Fundamentalmenge in $\mathcal{P}^2$ ist.

2. Finden Sie eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, mit $P_i = [b_i]$ für $i = 1,2,3$ und $P_4 = [b_1 + b_2 + b_3]$.

29. (4 Punkte) Wir betrachten zwei Fundamentalmengen des $\mathcal{P}^2$:

$$\{P_1 := [(0,2,0)], P_2 := [(1,1,0)], P_3 := [(1,1,1)], P_4 := [(0,1,1)]\}$$
$$\{O_1 := [(1,0,0)], O_2 := [(0,0,1)], O_3 := [(0,1,0)], O_4 := [(2,2,2)]\}$$

Finden Sie die Darstellendematrix der projektiven Abbildung $\kappa : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ mit $\kappa(P_i) = O_i$.

30. Sei $\kappa : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ eine projektive Transformation mit Darstellendermatrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie alle Fixpunkte von $\kappa$.

31. Sei $\kappa : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$ eine projektive Transformation mit Darstellendermatrix $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ und $G := P(U)$ ein projektiver Unterraum von $\mathcal{P}^n$. Zeigen Sie, wenn die Menge der Fixpunkte von $\kappa$ durch $G$ gegeben ist, so hat $A$ genau einen rellen Eigenwert $\lambda$ mit zugehörigen Eigenraum $E_\lambda = U$.

32. Sei $\kappa : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ eine projektive Transformation und $g_1, g_2 \subset \mathcal{P}^2$ zwei verschiedene projektive Geraden. Zeigen Sie, dass wenn alle Punkte auf $g_1$ und $g_2$ Fixpunkte von $\kappa$ sind, so ist $\kappa$ die Identität.

33. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume folgender Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Welche Matrix ist diagonalisierbar?

34. Zeigen Sie, dass die Identität die einzige perspektive Kollineation mit zwei Zentren ist.

**Notation:** Für die folgenden Aufgaben definieren wir für $a, z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $\langle a, z\rangle \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\mapsto x - (1-c)\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, z\rangle} z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \kappa : \mathcal{P}^n \setminus \mathcal{P}(\ker(f)) &\to \mathcal{P}^n \\ [x] &\mapsto [f(x)]. \end{aligned}$$

35. (4 Punkte) Jetz wollen wir zeigen unter welchen Bedingungen $\kappa$ eine perspektive Kollineation ist.

1. Zeigen Sie, dass $f$ eine lineare Abbildung ist.

2. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann injektive ist wenn $c \neq 0$ gilt. Berechnen Sie für $c = 0$ den Kern von $f$.

3. Wir ergänzen $a$ zu einer orthogonalen Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$: $B := \{e_1, \dots, e_n, a\}$. Finden Sie die Darstellendematrix von $f$ bezüglich der Basis $B$.

4. Sei $H := \{[x] \in \mathcal{P}^n | \langle a, x\rangle = 0\}$ die projektive Hyperebene mit homogenen Koordinaten $[a]$. Zeigen Sie, dass alle Punkte von $H$ Fixpunkte von $\kappa$ sind.

5. Wir haben nun gezeigt, dass $\kappa$ für $c \neq 0$ eine perspektive Kollineation ist. Berechnen Sie für $c \neq 0$ das Zentrum von $\kappa$.

36. Sei nun $c = 0$, dann heißt $\kappa$ Zentralprojektion. Beachten Sie, dass $\kappa$ nun keine projektive Transformation ist, da $f$ nicht mehr injektiv ist.

1. Berechnen Sie das Bild von $\kappa$ und geben Sie die größtmögliche Teilmenge von $\mathcal{P}^n$ an, auf der $\kappa$ wohl definiert ist.

2. Zeigen Sie dass $\kappa$ eine Projektion ist, das heißt $\kappa \circ \kappa = \kappa$ gilt.

37. Sei nun $c = -1$.

1. Zeigen Sie dass $\kappa$ nun involutorisch ist, dass heißt $\kappa \circ \kappa = \mathrm{Id}$ gilt.

2. Was ist die geometrische Bedeutung von $f$, für $a = z$?

38. Beweisen Sie folgende Permutationsregeln des Doppelverhältnisses:

  1. $DV(A,B,C,D) = DV(B,A,D,C) = DV(C,D,A,B) = DV(D,C,B,A)$

  2. $DV(A,B,C,D) = \frac{1}{DV(A,B,D,C)}$

39. (4 Punkte)

  1. Finden Sie alle Permutationen von (A,B,C,D).

  2. Seine $A,B,C,D \in \mathcal{P}^n$ vier kollineare Punkte mit $DV(A,B,C,D) = k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wert des Doppelverhältnisses für alle Permutationen von $(A,B,C,D)$.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 38 und Beispiel 8.6 aus der Übung.

40. Seine $g,h \subset \mathcal{P}^2$ zwei projektive Geraden und $A,B,C,D \in g$, $A',B',C' \in h$ sieben verschiedene Punkte. Konstruieren Sie mit Bleistieft und Lineal, den Punkt $D' \in h$, so dass gilt:

$$DV(A,B,C,D) = DV(A',B',C',D').$$

41. Sei $g \subset \mathcal{P}^n$ eine projektive Gerade $A,B,C,D \in g$ und $\kappa : g \to g$ die durch $\kappa(A) = A$ und $\kappa(B) = C$ definierte Involution. Konstruieren Sie mit Bleistieft und Lineal den Punkt $D' := \kappa(D)$.

42. Geben Sie jeweils ein Beispiel (Darstellendematrix) für eine Autoprojektivität $\kappa : \mathcal{P}^1 \to \mathcal{P}^1$ an, welche:

  1. eine Involution ist und keinen Fixpunkt hat.

  2. einen Fixpunkt hat und keine Involution ist.

  3. eine Involution mit zwei Fixpunkten ist.

43. Berechnen Sie das Doppelverhältnis $DV(A_i, B_i, C_i, D_i)$ für die folgenden Punkte. Welche Punktpaare $\{A_i, B_i\}, \{C_i, D_i\}$ trennen sich, welche befinden sich in harmonischer Lage?

1. $A_1 = [(1, 0)], B_1 = [(1, 2/3)], C_1 = [(1, 1)], D_1 = [(1, 2)]$

2. $A_2 = [(0, 1)], B_2 = [(1, 0)], C_2 = [(1, x)], D_2 = [(1, -x)], \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

3. $A_3 = [(1, -1/2)], B_3 = [(1, 1/4)], C_3 = [(1, 1)], D_3 = [(1, 0)].$

4. $A_1 = [(1, 0)], B_4 = [(0, 1)], C_4 = [(1, a)], D_4 = [(1, a + b)], \qquad a, b \in \mathbb{R}^+.$

44. Wir betrachten drei kopunktale Geraden im $\mathbb{R}^2$:

$$g_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, x = t * (0, 1), t \in \mathbb{R}\}$$
$$g_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, x = t * (1, 1), t \in \mathbb{R}\}$$
$$g_3 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, x = t * (1, 0), t \in \mathbb{R}\}$$

Konstruieren Sie mit Bleistift und Lineal die Gerade $g_4$, so dass die vier Geraden $g_1, g_2, g_3, g_4$ in harmonischer Lage liegen.

45. (4 Punkte) Sei $\kappa : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ eine projektive Spiegelung mit Zentrum $Z$. Wir wählen nun affine Koordinaten für die projektive Ebene $\mathcal{P}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \leftrightarrow [(1, x, y)] \in \mathcal{P}^2,$$

so dass $Z = [0, z_1, z_2]$ ein Fernpunkt ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen eigentlichen Punkt $A$ in $\mathcal{P}^2$ gilt:

$$\kappa(A) = F - (A - F),$$

wobei $F$ den Schnittpunkt der Fixpunktgeraden von $\kappa$ mit der Geraden $Z \vee A$ bezeichnet.

2. Wir wählen nun die x-Achse als Fixpunktgerade von $\kappa$ und $Z = [0, 1, 1]$ als Zentrum. Weiter sei $A := [1, 0, 1]$ und $g := Z \vee A$. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $g$ mit der Fixpunktgeraden.

3. Approximieren Sie nun einen Kreis in $\mathbb{R}^2$ durch 5 Punkte und konstruieren Sie mit Bleistift, Lineal und Winkelmesser das Bild des Kreises unter $\kappa$.

46. (4 Punkte) Sei $\kappa : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ eine projektive Spiegelung mit Zentrum $Z$. Wir wählen nun affine Koordinaten für die projektive Ebene $\mathcal{P}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \leftrightarrow [(1, x, y)] \in \mathcal{P}^2,$$

so dass die Fixpunktgerade von $\kappa$ die Ferngerade ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen eigentlichen Punkt $A$ in $\mathcal{P}^2$ gilt:

$$\kappa(A) = Z - (A - Z).$$

2. Wir wählen nun $Z = [1, 1, 1]$ als Zentrum und approximieren einen Kreis in $\mathbb{R}^2$ durch 5 Punkte. Konstruieren Sie mit Bleistift und Lineal das Bild des Kreises unter $\kappa$.

47. Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir die quadratische Form:

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, Ax \rangle. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$
3. $q(x-y) = q(y-x)$

48. Seien $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\mathcal{A} := \{a_1, \ldots, a_n\}$ zwei orthonormal Basen des $\mathbb{R}^n$ und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Basistransformation welche $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{A}$ abbildet, das heißt $S(b_i) = a_i$. Zeigen Sie dass $S$ orthogonal ist, dass heißt $S^t = S^{-1}$ gilt.

49. Zeigen Sie, dass eine Quadrik $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}^n$ genau dann regulär ist, wenn die Darstellendematrix ihrer Normalform keine Nullen auf der Diagonalen hat.

50. Wir betrachten die Quadrikgleichung $2xy = 1$.

1. Skizzieren Sie die Lösung der Quadrikgleichung im $\mathbb{R}^2$.
2. Finden Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche die Quadrik definiert.
3. Berechnen Sie die Normalform der Quadrik
4. Berechnen Sie die Fernpunkte der Quadrik

51. (4 Punkte) Wir schneiden den Doppelkegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 = z^2\}$ mit den Ebenen

$$E_i := \{p \in \mathbb{R}^3 | \, \langle p, n_i \rangle = d_i\}.$$

Berechnen Sie die Mengen $\mathcal{Q}_i := K \cap E_i$ und skizzieren Sie $\mathcal{Q}_i$ in der Ebene $E_i$ für:

1) $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $d_1 = 1$ 2) $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $d_2 = 0$.

3) $n_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d_3 = 1$ 4) $n_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d_4 = 0$

5) $n_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d_5 = 1$ 6) $n_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d_6 = 0$

7) $n_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $d_7 = 1$.

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Klassifikation von Quadriken im $\mathcal{P}^2$ aus der Übung.

52. Wir betrachten zwei Quadriken im $\mathcal{P}^2$, welche in affinen Koordinaten durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\mathcal{Q}_1 : x - y^2 + 2y - 1 = 0$$
$$\mathcal{Q}_2 : 2xy = 4$$

Berechnen Sie die inneren und äußeren Punkte der Quadriken und skizzieren Sie ihre Lösung im $\mathbb{R}^2$.

53. Wir betrachten zwei Quadriken im $\mathcal{P}^3$, welche in affinen Koordinaten durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\mathcal{Q}_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$\mathcal{Q}_2 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

1. Welche Punkte der Quadriken sind regulär?

2. Berechnen Sie für die regulären Punkte der Quadriken jeweils den Tangentialraum.

3. Wählen Sie jeweils einen regulären Punkt auf den Quadriken und skizzieren Sie die Quadrik und den Tangetialraum an diesem Punkt.

54. Wir betrachten die Quadrik im $\mathcal{P}^2$, welche in affinen Koordinaten durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\mathcal{Q} : x - y^2 + 2y - 1 = 0$$

1. Berechnen Sie die Polarhyperebene für die Punkte $P_1 := [(2, 1, 1)], P_2 := [(2, 0, 1)], P_3 := [(0, 1, 1)]$ und skizzieren Sie die Ergebnisse.

2. Was ist das Zentrum von $\mathcal{Q}$?

55. Sei $\mathcal{Q}$ eine reguläre Quadrik im $\mathcal{P}^n$. Zeigen Sie, dass die Polarhyperebenen von kollinearen Punkten kopunktal sind.

56. Sei $\mathcal{Q}$ eine reguläre Quadrik im $\mathcal{P}^n$ und $\kappa : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$ eine projektive Transformation. Zeigen Sie, dass $X, Y \in \mathcal{P}$ genau dann konjugiert bzgl. $\mathcal{Q}$ sind, wenn $\kappa(X)$ und $\kappa(Y)$ konjugiert bzgl. $\kappa(\mathcal{Q})$ sind.

57. Wir betrachten die Quadrik im $\mathcal{P}^2$, welche in affinen Koordinaten durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\mathcal{Q}_2 : 2xy = 4,$$

und die Gerade $g : x = y$.

1. Berechnen Sie die Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$ der Geraden mit der Quadrik.

2. Sei $O := (2, 2)$ konstruieren Sie mit Bleistift und Lineal $P \in S_1 \vee S_2$ so dass $O$ und $P$ konjugiert bzgl. $\mathcal{Q}$ sind.

58. Sei $Sym(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \, A^t = A\}$ die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen. Zeigen Sie, dass $Sym(n)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Welche Dimension hat $Sym(n)$ ?

59. 1. Berechnen Sie die Darstellende-Matrix des Kegelschnitts, welcher durch die folgenden 5 Punkte geht,

$$P_1 = (1,1), P_2 = (-1,1), P_3 = (-1,-1), P_4 = (1-,1), P_5 = (0,2).$$

2. Berechnen Sie das Zentrum des Kegelschnitts.

3. Handelt es sich um eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel? Skizzieren Sie Ihre Ergebnisse.

60. Wir betrachten den Kegelschnitt $\mathcal{Q}$ welcher in affinen Koordinaten durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$4xy = 1,$$

und drei Geraden $g_1, g_2, g_3$ mit homogenen Koordinaten $V_1 = [(-2,2,2)], V_2 = [(1,-1,0)], V_3 = [(2,2,1)]$. Welche der Geraden sind bezüglich $\mathcal{Q}$ konjugiert zu einander?

61. Zeigen Sie: Zwei Hyperebenen $H_1, H_2$ sind genau dann konjugiert bezüglich einer regulären Quadrik $\mathcal{Q}$, wenn $H_1$ den Pol von $H_2$ enthält und $H_2$ den Pol von $H_1$ enthält.

62. Sei $\mathcal{Q}$ eine Ellipse oder Hyperbel und $D_1, D_2$ zwei konjugierte Durchmesser von $\mathcal{Q}$. Zeigen Sie, dass $D_1$ und $D_2$ als Geraden konjugiert bzgl. $\mathcal{Q}$ sind, dass heißt $D_1$ den Pol von $D_2$ enthält und $D_2$ den Pol von $D_1$ enthält.

63. Wir betrachten den Kegelschnitt $\mathcal{Q}$ welcher in affinen Koordinaten durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$4xy = 1,$$

1. Berechnen Sie das Zentrum von $\mathcal{Q}$.

2. Sind die beiden Geraden $g_1 : x = y$ und $g_2 : x = -y$ Hauptachsen von $\mathcal{Q}$?

64. Sei $\mathcal{Q} := \{[x] \in \mathcal{P}^n \,|\, x^t A x = 0\}$ eine reguläre Quadrik. Zeigen Sie dass eine projektive Transformation $\kappa : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$, die Mengen $\mathcal{Q}^+$ und $\mathcal{Q}^-$ auf die Mengen $\tilde{\mathcal{Q}}^+$ und $\tilde{\mathcal{Q}}^+$ abbildet, wo bei $\tilde{\mathcal{Q}} := \kappa(\mathcal{Q})$.
**Hinweis:** Verwenden Sie die Definition für äußere Punkte aus der 12. Übung.

65. Sei $\mathcal{Q}$ eine regulärer Kegelschnitt. Zeigen Sie:

1. Eine Gerade ist genau dann eine Sekante von $\mathcal{Q}$, wenn ihr Pol ein äußerer Punkt von $\mathcal{Q}$ ist.

2. Eine Gerade ist genau dann eine Passante von $\mathcal{Q}$, wenn ihr Pol ein Innere Punkt von $\mathcal{Q}$ ist.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Definition für äußere Punkte aus der 13. Übung und betrachten Sie den Tangentialkegel.

66. (4 Punkte) Wir betrachten die Geradenbüschel im $\mathcal{P}^2$ durch die Punkte $X = [1, 1, 0]$ und $Y = [1, 0, 1]$. Seien $A = [1, -1, -1], B = [1, -1, 1], C = [0, 0, 1]$ die homogenen Koordinaten dreier Geraden in dem Büschel durch $X$ und $\tilde{A} = [1, -1, -1], \tilde{B} = [1, 1, -1], \tilde{C} = [0, 1, 0]$ die homogenen Koordinaten dreier Geraden in dem Büschel durch $Y$. Sei $\kappa$ die Projektivität zwischen den Büscheln, welche durch $\kappa(A) = \tilde{A}$, $\kappa(B) = \tilde{B}$ und $\kappa(C) = \tilde{C}$ definiert ist.

1. Begründen Sie, ob der durch $\kappa$ definierte Kegelschnitt singulär ist oder nicht.

2. Berechnen Sie nun den durch $\kappa$ definierte Kegelschnitt und fertigen Sie eine Skizze an.

67. (4 Punkte) Wir betrachten zwei Geraden im $\mathcal{P}^2$, die x-Achse mit homogenen Koordinaten $G = [0, 0, 1]$ und die Ferngerade mit homogenen Koordinaten $G' = [1, 0, 0]$. Mit $A = [a] = [1, 0, 0]$ und $B = [b] = [0, 1, 0]$ können wir jeden Punkt $P$ auf $G$ in der Form $P(t) := [a + tb]$ für $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ schreiben. Analog, seien $A' = [a'] = [0, 1, 0]$ und $B' = [b'] = [0, 0, 1]$ zwei Punkte auf $G'$ und $P'(t) := [a' + tb]$. Wir definieren eine Projektivität zwischen den Geraden durch $\kappa(P(t)) = P'(-t)$. Berechnen und skizzieren Sie die Quadrik, welche tangential zu den Geraden $P(t) \vee P'(-t)$ ist.