1. Übungsblatt - Mathematik 2 für BI

Wintersemester 2018/19

1. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume? Geben Sie im Fall eines Vektorraums auch dessen Dimension an.

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 = 2x_2 = -4x_3\}$

   (b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

   (c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + x_2 = 1\}$

   (d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, f(1) = 0\}$

   (e) $\left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig} \,:\, \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$

2. (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Polynome vom Grad höchstens 3 einen Vektorraum $\mathcal{P}^3(x)$ bildet. Bestimmen Sie auch die Dimension von $\mathcal{P}^3(x)$.

   (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Differentialgleichung

   $$y' = 2y + a$$

   genau für $a = 0$ einen Vektorraum bilden, indem Sie das *Unterraumkriterium* anwenden: *Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V is genau dann ein Vektorraum, wenn $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in U$ für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt.*

3. Erläutern Sie die Definition des Begriffs *Basis eines Vektorraums*.

   (a) Geben Sie zwei verschiedene Basen des $\mathbb{R}^3$ an und begründen Sie Ihre Behauptung. Erklären Sie auch den Zusammenhang mit der Dimension eines Vektorraums.

   (b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $C[0,1]$ den Vektorraum aller auf $[0,1]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1, x, \ldots, x^n\} \subseteq C[0,1]$ linear unabhängig sind. Was bedeutet dies für die Dimension von $C[0,1]$?

4. Sei V ein reeller Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Weiters seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls die Aussage falsch ist.

   (a) Sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ nicht in U, so ist auch $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ nicht in U.

   (b) Sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ nicht in U, so is $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ in U.

   (c) Ist $\mathbf{u}$ in U, nicht aber $\mathbf{v}$, so ist $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ nicht in U.

   (d) Ist $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ in U, so muss ist zumindest $\mathbf{u}$ oder $\mathbf{v}$ in U.

5. Bezeichne $C[-1,1]$ den Vektorraum aller auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen.

   (a) Erläutern Sie den Begriff *Skalarprodukt* und entscheiden Sie jeweils, ob ein Skalarprodukt auf $C[-1,1]$ vorliegt:

   $$\langle f,g\rangle_1 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \langle f,g\rangle_2 = \int_{-1}^{1} xf(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \langle f,g\rangle_3 = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (b) Bestimmen Sie für $f(x) = 3x$ und $g(x) = x^2$ den Cosinus des Winkels zwischen f und g bezüglich der Skalarprodukte aus (a).

6. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

   (a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x+y, x-2y)$

   (b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x^2, y+3)$

   (c) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto x+y-3z$

   (d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$

   (e) $V \to V, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}+\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

   (f) $C[0,1] \to C[0,1], \quad f(x) \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

   Geben Sie, falls linear, für (a)-(d) auch die Darstellung als Matrix an.

7. Berechnen Sie für die Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   den Ausdruck $AB - BA$.

8. Es sei Λ eine Diagonalmatrix und A eine allgemeine Matrix, d.h.

   $$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die beiden Produkte ΛA und $A\Lambda$ und finden Sie eine Bedingung an Λ, sodass $\Lambda A = A\Lambda$ für beliebiges A gilt.