

Klassische Differentialgeometrie (104.469)

Übungsblatt für den 7.3.2017

1. Gegeben seien die Abbildungen

$$a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 + 1 \end{pmatrix}$$

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 + 1 \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \text{sign}(t)\sqrt{|t|} \\ |t| + 1 \end{pmatrix}$$

$$e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh^2(t) \end{pmatrix} \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin^2(t) + 1 \end{pmatrix}$$

Zu d : sign ist die Vorzeichenfunktion: $\text{sign}(t) = 1$ für $t > 0$, $\text{sign}(0) = 0$, $\text{sign}(t) = -1$ für $t < 0$. Also $t = \text{sign}(t)|t|$.

Auf \mathbb{R}^2 sei die euklidische Norm

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

gegeben. Untersuchen Sie die obigen Abbildungen bezüglich

- (a) Differenzierbarkeit
- (b) Regularität: Wo ist $\|\gamma'\| \neq 0$, $\gamma \in \{a, b, c, d, e, f\}$?
- (c) Injektivität

Für welche zwei, γ_1, γ_2 , der obigen Abbildungen gibt es einen Diffeomorphismus $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$? Welche Abbildungen haben das gleiche Bild?

2. Gegeben sei die Kettenlinie

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den ersten Ableitungsvektor γ' (Tangentenvektor), seine Norm $\|\gamma'\|$ und den normierten ersten Ableitungsvektor $T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$. Was sind die asymptotischen Richtungen

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T(t) \quad ?$$

Um welchen Winkel dreht sich T in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$?

Berechnen Sie auch die Krümmung $\kappa(t) := \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3}$.

3. Gegeben seien

(a) Die Neil'sche Parabel, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

(b) Der Graph der Betragsfunktion, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$.

(c) Die Gerade, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die drei Abbildungen bei $t = 0$ auf Differenzierbarkeit und Regularität (ist $\|\gamma'(0)\| \neq 0$ für $\gamma \in \{p, b, g\}$). Entfernen Sie nun den “problematischen” Punkt $t = 0$ aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, um jeweils zwei differenzierbare, reguläre Abbildungen $p_{\pm} = p|_{\mathbb{R}_{\pm}}, b_{\pm} = b|_{\mathbb{R}_{\pm}}, g_{\pm} = |_{\mathbb{R}_{\pm}}$ mit Definitionsbereich den positiven bzw. negativen reellen Zahlen zu erhalten. Berechnen Sie dort nun die normierten Tangentenvektoren $T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ und seinen Limes für $t \rightarrow 0$, also

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}_{\pm}(\pm\epsilon)}{\|\dot{\gamma}_{\pm}(\pm\epsilon)\|}, \quad \gamma \in \{p, b, g\}.$$

Was für Rückschlüsse lassen sich damit auf das Aussehen der Bilder der Abbildungen bei $t = 0$ ziehen?