

Klassische Differentialgeometrie (104.469)

Übungsblatt für den 28.3.2017

14. (a) Sei $\beta : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine ebene Kurve. Dann gilt $\frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = (\cos(\psi(t)), \sin(\psi(t)))$ für ein $\psi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$.
Vergewissern Sie sich, dass

$$\kappa(t) := \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{\psi'(t)}{\|\beta'(t)\|},$$

also, dass κ die Änderung der Richtung des Tangentialvektors misst.

- (b) Sei nun $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve im \mathbb{R}^3 , N ein beliebiges Normalenfeld und $t_0 \in \mathcal{I}$ fix. Projizieren Sie γ orthogonal auf die Ebene durch $\gamma(t_0)$, die durch $\gamma'(t_0)$ und $N(t_0)$ aufgespannt wird. Identifizieren Sie diese Ebene mit \mathbb{R}^2 um eine ebene Kurve $\tilde{\gamma} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die orthogonale Projektion von γ , zu erhalten.
Zeigen Sie, dass

$$|\kappa(t_0)| = \left| \frac{\det(\tilde{\gamma}'(t_0), \tilde{\gamma}''(t_0))}{\|\tilde{\gamma}'(t_0)\|^3} \right| = |T'(t_0) \cdot N(t_0)| = |\kappa_n(t_0)|.$$

15. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine ebene Kurve und N ein Normalenfeld, das tangential zu dieser Ebene ist. Zeigen Sie, dass N parallel ist. Wie sieht ein beliebiges paralleles Normalenfeld aus?
16. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve im \mathbb{R}^3 . Beweisen Sie:
- (a) Zwei beliebige parallele Rahmen von γ unterscheiden sich durch eine konstante Rotation in der Normalebene.
- (b) Sei N ein paralleles Normalenfeld von γ . Dann ist ein Normalenfeld \tilde{N} genau dann parallel, wenn es einen konstanten Winkel mit N einschließt.
17. Zeigen Sie, dass eine Kurve genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn die Krümmungen κ_g und κ_n eines parallelen Rahmens eine Geradengleichung im \mathbb{R}^2 erfüllen. Wie lässt sich der Radius der Sphäre von dieser Gleichung ablesen?
18. Gegeben sei

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n(t) & \kappa_g(t) \\ \kappa_n(t) & 0 & -\tau(t) \\ -\kappa_g(t) & \tau(t) & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\kappa_n, \kappa_g, \tau : \mathbb{R} \supset \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt sind.

Zeigen Sie, dass

$$F(t) := \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k F_i(t)$$

mit $F_0(t) = id_{\mathbb{R}^3}$ und

$$F_i(t) = \int_{t_0}^t F_{i-1}(\tilde{t}) \phi(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad \text{für } i > 0$$

ein angepasster Rahmen für eine bogenlängenparametrisierte Kurve γ ist, deren Krümmungen und Torsion κ_n, κ_g und τ sind. Sie dürfen annehmen, dass $F(t)$ und $F'(t)$ existieren, und, dass

$$F'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F'_i(t)$$

gilt. Wie vereinfacht sich F , wenn ϕ konstant ist.