Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 4.4.2017

19. (a) Vergewissern Sie sich, dass die Frenetbedingung $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$ $\forall t$ invariant unter Reparametrisierungen ist.
    (b) Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ eine Frenetkurve. Zeigen Sie, dass (γ, N) genau dann ein geodätischer Streifen ist, wenn $\pm N$ das Hauptnormalenfeld ist.

20. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Frenetkurve. Das *Darboux Vektorfeld* ist gegeben durch
$$D := \tau T + \kappa B.$$
Zeigen Sie, dass die Frenetgleichungen die Form
$$T' = D \times T, \qquad N' = D \times N, \qquad B' = D \times B$$
annehmen.

21. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3$ eine Frenetkurve. Zeigen Sie, dass (T, N, B) mit
$$T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad B = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}, \quad N = B \times T$$
der Frenetrahmen der Kurve ist.

22. Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $\kappa : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ und $\ell : \mathcal{I} \to \mathbb{R}_+$, $\ell(t) > 0$ $\forall t \in \mathcal{I}$, $0 \in \mathcal{I}$. Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} \gamma :\ & \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2, \\ & t \mapsto \begin{pmatrix} \int_0^t \cos\left[\int_0^s \kappa(\tilde{s})\ell(\tilde{s})\,\mathrm{d}\,\tilde{s} + \alpha_0\right] \ell(s)\,\mathrm{d}\,s + \gamma_{01} \\ \int_0^t \sin\left[\int_0^s \kappa(\tilde{s})\ell(\tilde{s})\,\mathrm{d}\,\tilde{s} + \alpha_0\right] \ell(s)\,\mathrm{d}\,s + \gamma_{02} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{01}, \gamma_{02}, \alpha_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
eine ebene Kurve γ ergibt, deren Krümmung
$$\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3}$$
ist und deren Tangentenvektor γ' die Norm ℓ hat, $\|\gamma'(t)\| = \ell(t)$.

    Inwiefern wirkt sich die Wahl der Integrationskonstanten $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \alpha_0$ auf die Kurve aus?

    Formulieren Sie einen Fundamentalsatz für Kurven im $\mathbb{R}^2$, analog zum Fundamentalsatz für Frenetkurven im $\mathbb{R}^3$.

    Rekonstruieren Sie die Kurve für

    (a) $\kappa(t) = \frac{1}{r}$, $\ell(t) = 1$, $\mathcal{I} = \mathbb{R}$,
    (b) $\kappa(t) = \frac{1}{r}$, $\ell(t) = t + 1$, $\mathcal{I} = (-1, \infty)$,
    (c) $\kappa(t) = \frac{2+t^2}{(\sqrt{1+t^2})^3}$, $\ell(t) = \sqrt{1+t^2}$, $\mathcal{I} = \mathbb{R}$.

    wobei Sie die Integrationskonstanten $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \alpha_0$ beliebig wählen können. Wie sehen die Kurven aus?

23. Drücken Sie die Krümmung und Torsion einer Frenetkurve in Termen von κ_n und κ_g eines parallelen Rahmens und umgekehrt aus.