Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 2.5.2017

29. Sei

$$\begin{aligned}\sigma:\ \mathbb{R}^2 \supseteq U &\to \mathbb{R}^3,\\ (u,v) &\mapsto \sigma(u,v) = (u,v,z(u,v)),\end{aligned}$$

wobei $z:\ U \to \mathbb{R}$ glatt ist.

Berechnen Sie die Gauß-Abbildung, die zweite Fundamentalform und den Weingartenoperator.

Sei nun (u_0, v_0) ein stationärer Punkt der Funktion z. Wie sehen an diesem Punkt der Weingartenoperator und die Gauß-Krümmung aus? Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass $z_{uv} = 0$. Was ist dann eine Bedingung für einen Nabelpunkt, was eine für einen Flachpunkt.

30. Angenommen eine Fläche ist implizit durch eine Gleichung $F(x,y,z) = 0$ mit einer glatten Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F \neq 0$ dort wo $F(x,y,z) = 0$ gegeben. Eine Parametrisierung $\sigma : (u,v) \mapsto \sigma(u,v)$ dieser Fläche erfüllt also $F \circ \sigma = 0$. Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung durch

$$n = \pm \frac{(\operatorname{grad} F) \circ \sigma}{\|(\operatorname{grad} F) \circ \sigma\|}$$

gegeben ist (grad bezeichnet den Gradienten, also den Vektor der partiellen Ableitungen).

31. Für $r > 0$ ist eine Parametrisierung der Möbiusschleife durch

$$(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = r\big(\cos(2u), \sin(2u), 0\big) + v\big(\cos(u)\cos(2u), \cos(u)\sin(2u), \sin(u)\big)$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass $\sigma(u+\pi, 0) = \sigma(u, 0)$, aber $n(u+\pi, 0) = -n(u, 0)$.

32. Berechnen Sie die Gauß-Abbildung und den Weingartenoperator des Helikoids. Bestimmen Sie auch die mittlere Krümmung, die zwei Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen.

33. Untersuchen Sie, wie sich die erste und zweite Fundamentalform einer Fläche unter Reparametrisierungen und euklidischen Bewegungen ändern.