# Klassische Differentialgeometrie (104.469)
# Übungsblatt für den 9.5.2017

34. Zeigen Sie, dass alle Punkte einer Sphäre mit Radius $r > 0$ Nabelpunkte sind und berechnen Sie ihre Gauß- und mittlere Krümmung.

35. Finden Sie eine Krümmungslinienparametrisierung für das Helikoid.

36. Für $M \in \mathbb{R}^3$ und $\rho \in \mathbb{R}$ sei $D_{M,\rho}$ die Funktion

$$\begin{aligned} D_{M,\rho} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, \\ X &\mapsto \|X - M\|^2 - \rho^2. \end{aligned}$$

Dann beschreibt $D_{M,\rho}(X) = 0$ eine Kugel mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^3$ und Radius $\rho$.
Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

(a) Für einen Punkt $(u_0, v_0) \in U$, der kein Nabelpunkt ist, zeigen Sie, dass

$$(D_{M,\rho} \circ \sigma)(u_0, v_0) = 0, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial u} \\ \frac{\partial D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial u \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial v \partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wenn $(\xi, \eta)^T$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist,

$$M = \sigma(u_0, v_0) + \frac{1}{\kappa(u_0, v_0)} n(u_0, v_0),$$

wobei $n$ die Gauß-Abbildung von $\sigma$ ist und $\kappa$ die zu $(\xi, \eta)^T$ gehörende Hauptkrümmung ist, und $\rho^2 = \frac{1}{\kappa^2}$.

(b) Zeigen Sie, dass man $M$ und $\rho$ genau dann so wählen kann, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial u} \\ \frac{\partial D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial u \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho}\circ\sigma}{\partial v \partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wenn $(u_0, v_0)$ ein Nabelpunkt ist.

37. Zeigen Sie, dass die Christoffel-Symbole ${\Gamma^i}_{jk}$ einer Fläche $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\sum_{l=1}^{2} g_{il} {\Gamma^l}_{jk} = \frac{1}{2} \left( \partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk} \right)$$

gegeben sind, wobei $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial v}$ und

$$g_{ij} = \langle \partial_i \sigma, \partial_j \sigma \rangle \qquad \text{für } \ i, j \in \{1, 2\}.$$

<u>Anleitung:</u> Zeigen Sie als Zwischenschritt, dass

$$\partial_i g_{jk} = \sum_{l=1}^{2} g_{lk} {\Gamma^l}_{ij} + \sum_{l=1}^{2} g_{lj} {\Gamma^l}_{ik}$$

gilt, indem Sie verwenden, dass

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j\sigma = \sum_{k=1}^{2} {\Gamma^k}_{ij}\partial_k\sigma$$

und, dass die kovariante Ableitung $\nabla$ metrisch ist, also, dass für beliebige Tangentialvektoren $\xi, \eta$

$$\partial_i\langle\xi, \eta\rangle = \langle\nabla_{\partial_i}\xi, \eta\rangle + \langle\xi, \nabla_{\partial_i}\eta\rangle$$

gilt.