Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 16.5.2017

38. Sei σ eine Fläche, deren Bild auf einer Sphäre mit Radius r liegt und Mittelpunkt im Ursprung liegt. Berechnen Sie den Krümmungstensor via

$$R\xi = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \xi - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \xi,$$

um zu zeigen, dass

$$R = -\frac{1}{r^2} \sigma_u \wedge \sigma_v.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $n = \frac{1}{r}\sigma$, um $\nabla \sigma_u = d\sigma_u - (d\sigma_u \cdot n)n$ zu berechnen.

39. Sei $F = (\sigma_u, \sigma_v, n)$ ein angepasster Rahmen für die Fläche $\sigma : \mathbb{R}^3 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F^{-1} F_u \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F^{-1} F_v$$

genau dann schiefsymmetrische Matrizen sind, wenn

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

konstant ist.

40. Beweisen Sie: In Krümmungslinienkoordinaten haben die Codazzi-Gleichungen die Form

$$0 = \kappa_{1v} + \frac{E_v}{2E}(\kappa_1 - \kappa_2) = \kappa_{2u} - \frac{G_u}{2G}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

41. Zeigen Sie, dass die Gauß-Gleichung für eine konform parametrisierte Fläche die Gestalt

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \ln E$$

annimmt.

Anleitung:

(a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole ${\Gamma^i}_{jk}$ mit Hilfe der Koszul-Formeln.

(b) Verwenden Sie, dass die Matrixdarstellung des Krümmungstensors durch

$$R \simeq \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_2 - \frac{\partial}{\partial v}\Gamma_1 + [\Gamma_1, \Gamma_2]$$

gegeben ist, wobei

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} {\Gamma^1}_{i1} & {\Gamma^1}_{i2} \\ {\Gamma^2}_{i1} & {\Gamma^2}_{i2} \end{pmatrix} \qquad i \in \{1, 2\}.$$