Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 30.5.2017

46. Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, die längs einer Kurve $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3$ tangential zu einer Ebene ist. Wenn $\phi : I \to U$ die Kurve im Parameterbereich ist, also $\gamma = \sigma \circ \phi$, dann gilt also $d(n \circ \phi) = 0$.

    Zeigen Sie, dass die Punkte der Kurve γ auf σ parabolisch oder flach sind, also dass die Gauß-Krümmung K verschwindet.

    Hinweise:

    - Die Gauß-Krümmung K ist die Determinante des Weingartentensorfeldes.
    - Ein Vektorraumendomorphismus hat einen nichttrivialen Kern genau dann, wenn seine Determinante verschwindet.

47. Seien σ_1 und σ_2 zwei Flächen, die sich längs einer Kurve γ so schneiden, dass ihre Gauß-Abbildungen linear unabhängig sind.

    Zeigen Sie, dass γ genau dann eine Prä-Geodätische von σ_1 und σ_2 ist, wenn γ in einer Geraden liegt.

48. Parametrisieren Sie den Zylinder

    $$S^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

    mit geodätischen Polarkoordinaten um $p_0 = (R, 0, 0)$ und berechnen Sie die erste Fundamentalform.

    Hinweis/mögliche Strategie: Geodätische und damit geodätische Polarkoordinaten hängen nur von der ersten Fundamentalform ab. Das Abwickeln des Zylinders in die Ebene ist eine Isometrie und ändert die erste Fundamentalform nicht. Finden Sie daher zuerst geodätische Polarkoordinaten für die Ebene und transferieren Sie sie dann auf den Zylinder.

49. Zeigen Sie, dass in geodätischen Polarkoordinaten (r, ϑ)

    $$K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$$

    gilt.