Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 13.6.2017

50. Zeigen Sie, dass die Helikoide eine Minimalfläche ist und bestimmen Sie ihre Schmieg- und Krümmungslinien.

51. Zeigen Sie, dass das Katenoid $\sigma : (u,v) \mapsto (\cosh u \quad \cos v, \cosh u \quad \sin v, u)$ eine konform parametrisierte Minimalfläche ist.

52. Zeigen Sie, dass die Enneper-Fläche $\sigma : (u,v) \mapsto \operatorname{Re}\left(\left(z - \frac{z^3}{3}\right), i\left(z + \frac{z^3}{3}\right), z^2\right)$ mit $z = u + iv$ eine konform parametrisierte Minimalfläche ist.

53. Gegeben seien die zwei holomorphen Funktionen $F, G : U \to \mathbb{C}$ mit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$,

$$F(z) = \frac{4}{1 - z^4}, \quad G(z) = iz.$$

Benutzen Sie F und G um mittels der Weierstrassdarstellung eine Minimalfläche $\sigma(U)$ zu erzeugen, also

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\left[\int^z \phi^1(\tilde{z}) d\tilde{z}\right] \\ \operatorname{Re}\left[\int^z \phi^2(\tilde{z}) d\tilde{z}\right] \\ \operatorname{Re}\left[\int^z \phi^3(\tilde{z}) d\tilde{z}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\left[\int^z \frac{F(\tilde{z})}{2}(1 - G^2(\tilde{z})) d\tilde{z}\right] \\ \operatorname{Re}\left[\int^z i\frac{F(\tilde{z})}{2}(1 + G^2(\tilde{z})) d\tilde{z}\right] \\ \operatorname{Re}\left[\int^z F(\tilde{z}) G(\tilde{z}) d\tilde{z}\right] \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei $z = u + iv$.
Hinweis: Die nötigen Integrale finden Sie z.B. auf Wikipedia.