Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 20.6.2017

54. (a) Sei $\gamma : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}^3$ gegeben durch

$$\gamma(z) = \begin{pmatrix} \int^z \frac{F(\tilde{z})}{2}(1 - G^2(\tilde{z}))d\tilde{z} \\ \int^z i\frac{F(\tilde{z})}{2}(1 + G^2(\tilde{z}))d\tilde{z} \\ \int^z F(\tilde{z})G(\tilde{z})d\tilde{z} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $F, G : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ holomorph sind. Zeigen Sie, dass γ eine holomorphe Null-Kurve ist, also, dass

$$\|\gamma'\|^2 = 0.$$

(b) Sei nun umgekehrt $\gamma : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}^3$ eine holomorphe Null-Kurve. Zeigen Sie, dass es holomorphe Funktionen $F, G : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ gibt so, dass

$$\gamma(z) = \begin{pmatrix} \int^z \frac{F(\tilde{z})}{2}(1 - G^2(\tilde{z}))d\tilde{z} \\ \int^z i\frac{F(\tilde{z})}{2}(1 + G^2(\tilde{z}))d\tilde{z} \\ \int^z F(\tilde{z})G(\tilde{z})d\tilde{z} \end{pmatrix}.$$

<u>Hinweis:</u> Definieren Sie $G := \frac{\gamma'_3}{\gamma'_1 - i\gamma'_2}$ und $F := \frac{\gamma'_3}{G}$, wobei $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$.

55. Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$ eine konform parametrisierte Minimalfläche mit Weierstrass-Daten (F, G) und $\gamma : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}^3$ die entsprechende holomorphe Null-Kurve. Es gilt also $\sigma(u, v) = \operatorname{Re} \gamma(u + iv)$, wobei γ die Form (1) hat.

Wir suchen eine geometrische Interpretation für die Funktion G. Zeigen Sie:

(a) $\gamma' = \sigma_u - i\sigma_v$.

(b) Für den Normalvektor N an die Fläche gilt

$$N = \frac{-i\ \gamma' \times \bar{\gamma}'}{\|i\ \gamma' \times \bar{\gamma}'\|}.$$

(c) Es gilt,

$$N = \frac{1}{1 + |G|^2} \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}[G] \\ 2\operatorname{Im}[G] \\ -1 + |G|^2 \end{pmatrix},$$

wobei wie üblich für komplexe Zahlen $|G|^2 = G\bar{G}$.

(d) N nimmt Werte auf der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ an. Projizieren Sie N nun stereographisch vom Nordpol in die Ebene. Was erhalten Sie?

56. Sei $\sigma : (u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ eine konform parametrisierte Minimalfläche. Zeigen Sie, dass ihre zweite Fundamentalform in der Form

$$II = \operatorname{Re}\left[(e - if)(\mathrm{d}\,u + i\,\mathrm{d}\,v)^2\right]$$

geschrieben werden kann, und, dass $(e^\alpha - if^\alpha) = e^{i\alpha}(e - if)$ für die Flächen σ^α der assoziierten Familie. Schließen Sie daraus, dass die Krümmungslinien von σ die Asymptotenlinien von σ^* sind.