Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 27.6.2017

57. Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto \sigma(u,v)$ eine nabelpunktfreie Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung $H \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Parallelfläche

$$\begin{aligned} &\sigma^* : U \to \mathbb{R}^3, \\ &(u,v) \mapsto \sigma^*(u,v) := \sigma(u,v) + \frac{1}{H} n(u,v) \end{aligned}$$

eine konform äquivalente Metrik $I^* = \frac{H^2-K}{H^2} I$ induziert und konstante mittlere Krümmung $H^* = H$ hat, wenn man $n^* = -n$ wählt.

58. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \gamma(t)$ eine Kurve, die in einer Ebene enthalten ist. Sei n der Normalvektor dieser Ebene und σ die Fläche

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{I} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3, \\ (t,v) &\mapsto \gamma(t) + v\ n(t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass σ abwickelbar ist.

<u>Hinweis:</u> Bogenlängenparameter.

59. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supset \mathcal{I} \to S^2 \subset \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \gamma(t)$ eine sphärische Kurve, also eine Kurve, deren Bild in der Einheitskugel S^2 enthalten ist. Es sei weiters γ eine Kurve der Länge 1. Sei σ die Fläche

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}^3, \\ (t,v) &\mapsto v\ \gamma(t), \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Zeigen Sie, dass σ abwickelbar ist.

<u>Hinweise:</u> Bogenlängenparameter. An was erinnert Sie die Gestalt der ersten Fundamentalform? Finden Sie einen hilfreichen Parameterwechsel.

60. Sei $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \gamma(t)$ eine Frenet-Kurve und die Fläche σ gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}^3, \\ (t,v) &\mapsto \gamma(t) + v\ \gamma'(t), \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Zeigen Sie, dass σ abwickelbar ist.

<u>Hinweise:</u> Bogenlängenparameter. Berechnen Sie die Gauß-Krümmung.