Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 12.3.2018

1. Gegeben seien die Abbildungen

$$a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix} \qquad\qquad b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4+1 \end{pmatrix}$$

$$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6+1 \end{pmatrix} \qquad\qquad d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} sign(t)\sqrt{|t|} \\ |t|+1 \end{pmatrix}$$

$$e: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh^2(t) \end{pmatrix} \qquad\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin^2(t)+1 \end{pmatrix}$$

Zu d: $sign$ ist die Vorzeichenfunktion: $sign(t) = 1$ für $t > 0$, $sign(0) = 0$, $sign(t) = -1$ für $t < 0$. Also $t = sign(t)|t|$.

Auf $\mathbb{R}^2$ sei die euklidische Norm

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

gegeben. Untersuchen Sie die obigen Abbildungen bezüglich

(a) Differenzierbarkeit

(b) Regularität: Wo ist $\|X'\| \neq 0$, $X \in \{a, b, c, d, e, f\}$?

(c) Injektivität

Für welche zwei, $X_1,\ X_2$, der obigen Abbildungen gibt es einen Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $X_1 = X_2 \circ \psi$? Welche Abbildungen haben das gleiche Bild?

2. Gegeben sei die Kettenlinie

$$X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den ersten Ableitungsvektor X' (Tangentenvektor), seine Norm $\|X'\|$ und den normierten ersten Ableitungsvektor $T = \frac{X'}{\|X'\|}$. Was sind die asymptotischen Richtungen

$$\lim_{t \to \pm\infty} T(t) \quad ?$$

Um welchen Winkel dreht sich T in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(-\infty, \infty)$?

Berechnen Sie auch die Krümmung $\kappa(t) := \frac{\det(X'(t)X''(t))}{\|X'(t)\|^3}$.

3. Gegeben seien

(a) Die Neil'sche Parabel, $\quad p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}.$

(b) Der Graph der Betragsfunktion, $\quad b:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}.$

(c) Die Gerade, $\quad g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Untersuchen Sie die drei Abbildungen bei $t = 0$ auf Differenzierbarkeit und Regularität (ist $\|X'(0)\| \neq 0$ für $X \in \{p, b, g\}$). Entfernen Sie nun den "problematischen" Punkt $t = 0$ aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, um jeweils zwei differenzierbare, reguläre Abbildungen $p_\pm = p|_{\mathbb{R}_\pm}$, $b_\pm = b|_{\mathbb{R}_\pm}$, $g_\pm = |_{\mathbb{R}_\pm}$ mit Definitionsbereich den positiven bzw. negativen reelen Zahlen zu erhalten. Berechnen Sie dort nun die normierten Tangentenvektoren $T = \frac{X'}{\|X'\|}$ und seinen Limes für $t \to 0$, also

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{X'_\pm(\pm\epsilon)}{\|X'_\pm(\pm\epsilon)\|}, \qquad X \in \{p, b, g\}.$$

Was für Rückschlüsse lassen sich damit auf das Aussehen der Bilder der Abbildungen bei $t = 0$ ziehen?