Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 19.3.2018

4. Gegeben seien wieder:

   (a) Die Neil'sche Parabel, $\quad p: \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3,\ t \mapsto O + e_1 t^3 + e_2 t^2.$

   (b) Der Graph der Betragsfunktion, $\quad b: \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3,\ t \mapsto O + e_1 t + e_2 |t|.$

   (c) Die Gerade, $\quad g: \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3,\ t \mapsto O + e_1 t^3.$

   Für welche der drei Abbildungen gibt es einen Diffeomorphismus $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $\gamma \circ \psi : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3$, $\gamma \in \{p, b, g\}$, regulär ist? (Und für welche gibt es keinen?)

   Für welche der drei Abbildungen gibt es eine bijektive, differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass $\tilde{X} = X \circ \left(\phi^{-1}\right) : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3$, $X \in \{p, b, g\}$, regulär ist? (Und für welche gibt es keine?)

5. Finden Sie reguläre Parametrisierungen für die Kegelschnitte

$$C_{\alpha,d} = \{O + e_1 x + e_2 y + e_3 z \in \mathcal{E}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ x \cos\alpha + z \sin\alpha = d\},$$

   $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $d \neq 0$.

   Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha < \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha > \frac{\pi}{4}$.

6. Zeigen Sie: Eine Abbildung

$$\begin{aligned} X :\ \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} &\to \mathcal{E}^n, \\ t &\mapsto X(t), \end{aligned}$$

   mit $X' \neq 0$ parametrisiert eine Gerade oder ein Geradensegment, wenn $X'(t)$ und $X''(t)$ linear abhängig sind.

   Wie sieht in diesem Fall eine Reparametrisierung $\tilde{X}(\tilde{t})$ von $X(t)$ aus, für die $\tilde{X}'' = 0$ gilt?

7. Vergewissern Sie sich, dass die Bogenlänge

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|X'(\tilde{t})\| \, \mathrm{d}\,\tilde{t}$$

   einer Kurve $t \mapsto X(t)$ invariant unter Reparametrisierungen ist.

8. Betrachten Sie die Kurve $X(t) = O + e_1 x(t) + e_2 y(t) + e_3 z(t)$, die implizit durch die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{x(t)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{b}\right)^2 + \left(\frac{z(t)}{c}\right)^2 = 1, \qquad a\sqrt{b^2 - c^2}\ z(t) = c\sqrt{a^2 - b^2}\ x(t),$$

   mit $a > b > c > 0$ gegeben ist.

   (a) Als Schnitt welcher zwei Flächen ist die Kurve gegeben?

   (b) Finden Sie eine Parametrisierung der Kurve.

   (c) Berechnen Sie die Bogenlänge und eine Parametrisierung nach Bogenlänge.

   (d) Wie sieht die Kurve aus?