Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 9.4.2018

9. Sei (X, N) ein Streifen für die Kurve $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ und $\tilde{N} := N \cos\phi + B \sin\phi$, wobei $\phi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ glatt ist und $B = T \times N$.

   Zeigen Sie, dass $(X, \tilde{N})$ ein Streifen ist und berechnen Sie, wie sich die Krümmungen $\kappa_n,\ \kappa_g$ und die Torsion τ beim Wechsel von (X, N) zu $(X, \tilde{N})$ ändern.

10. Sei (X, N) ein Streifen für die Kurve $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ und $\tilde{X} := X \circ \psi$ eine Reparametrisierung von X, also $\psi : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ mit $\psi' \neq 0$.

    (a) Zeigen Sie, dass $(\tilde{X}, \tilde{N})$ mit $\tilde{N} = N \circ \psi$ ein Streifen ist.

    (b) Wie ändern sich die Krümmungen $\kappa_n,\ \kappa_g$ und die Torsion τ beim Wechseln von (X, N) zu $(\tilde{X}, \tilde{N})$?

11. Sei $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ eine reguläre Parametrisierung einer Gerade, also $X' \times X'' = 0$, und sei F ein angepasster Rahmen für X.

    Zeigen Sie, dass $\kappa_n = 0 = \kappa_g$ und finden Sie ein Einheitsnormalenfeld N so, dass $\tau = 1$.

12. Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned} X &: \mathbb{R} \to \mathcal{E}^3, \\ t &\mapsto O + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 \frac{2t^3}{3} \end{aligned}$$

    Berechnen Sie die Bogenlänge von X.

    Finden Sie ein Normalenfeld N für X und berechnen Sie bei $t = 0$ Normalkrümmung, geodätische Krümmung und Torsion mit Hilfe der Beziehungen

$$\kappa_n = -(N', T), \qquad \kappa_g = -(T', B), \qquad \tau = (N', B).$$

13. Beweisen Sie:

    Eine bogenlängenparametrisierte Kurve X in $\mathcal{E}^3$ ist genau dann eben, wenn es einen angepassten Rahmen mit $\kappa_g = 0 = \tau$ gibt.

    Gilt die gleiche Aussage auch für $\kappa_n = 0 = \tau$ und für $\kappa_n = 0 = \kappa_g$?