Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 16.4.2018

14. (a) Sei $Y : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^3$ eine ebene Kurve. Dann gilt $\frac{Y'(t)}{\|Y'(t)\|} = e_1 \cos(\psi(t)) + e_2 \sin(\psi(t))$ für eine Funktion $\psi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$.
    Vergewissern Sie sich, dass
    $$\kappa(t) := \frac{\det\left(Y'(t), Y''(t)\right)}{\|Y'(t)\|^3} = \frac{\psi'(t)}{\|Y'(t)\|},$$
    also, dass κ die Änderung der Richtung des Tangentialvektors misst.

    (b) Sei nun $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve im $\mathcal{E}^3$, sei N ein beliebiges Normalenfeld und $t_0 \in \mathcal{I}$ fix. Projizieren Sie X orthogonal auf die affine Ebene durch $X(t_0)$, die durch $X'(t_0)$ und $N(t_0)$ aufgespannt wird. Identifizieren Sie diese Ebene mit $\mathcal{E}^2$ um eine ebene Kurve $\tilde{X} : \mathcal{I} \to \mathcal{E}^2$, die orthogonale Projektion von X, zu erhalten.
    Zeigen Sie, dass
    $$|\kappa(t_0)| = \left| \frac{\det\left(\tilde{X}'(t_0), \tilde{X}''(t_0)\right)}{\|\tilde{X}'(t_0)\|^3} \right| = |\langle T'(t_0), N(t_0)\rangle| = |\kappa_n(t_0)|.$$

15. Sei $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ eine ebene Kurve und N ein Normalenfeld, das tangential zu dieser Ebene ist. Zeigen Sie, dass N parallel bezglich dem Normalzusammenhang ist. Wie sieht ein beliebiges paralleles Normalenfeld aus?

16. Sei $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ eine Kurve im $\mathcal{E}^3$. Beweisen Sie:
    (a) Zwei beliebige parallele Rahmen von X unterscheiden sich durch eine konstante Rotation in der Normalebene.
    (b) Sei N ein paralleles Normalenfeld von X. Dann ist ein Normalenfeld $\tilde{N}$ genau dann parallel, wenn es einen konstanten Winkel mit N einschließt.

17. Zeigen Sie, dass eine Kurve in $\mathcal{E}^3$ genau dann auf einer Sphäre oder in einer Ebene liegt, wenn die Krümmungen κ_g und κ_n eines parallelen Rahmens eine Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$ erfüllen. Wie lässt sich der Radius der Sphäre von dieser Gleichung ablesen?