Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 23.4.2018

18. (a) Vergewissern Sie sich, dass die Frenetbedingung $\forall t \in \mathcal{I}: \; X'(t) \times X''(t) \neq 0$ einer Kurve $X : \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ invariant unter Reparametrisierungen ist.
    (b) Sei $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ eine Frenetkurve. Zeigen Sie, dass (X, N) genau dann ein geodätischer Streifen ist ($\kappa_g = 0$), wenn $\pm N$ das Hauptnormalenfeld ist.

19. Sei $X : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \to \mathcal{E}^3$ eine bogenlängenparametrisierte Frenetkurve. Das *Darboux Vektorfeld* ist gegeben durch
$$D := \tau T + \kappa B.$$
Zeigen Sie, dass die Frenetgleichungen die Form
$$T' = D \times T, \qquad N' = D \times N, \qquad B' = D \times B$$
annehmen.

20. Drücken Sie die Krümmung und Torsion einer Frenetkurve in Termen von κ_n und κ_g eines parallelen Rahmens und umgekehrt aus.

21. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid mit zwei entfernten Punkten
$$E = \left\{ O + e_1 x + e_2 y + e_3 z \; \in \mathcal{E}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \; |z| < c \right\}, \qquad a > b > c,$$
eine Fläche ist, indem Sie eine reguläre Parametrisierung finden.

22. Zeigen Sie, dass der Torus
$$T^2 := \left\{ O + e_1 x + e_2 y + e_3 z \; \in \mathcal{E}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$$
mit $0 < r < R$ eine Fläche ist.
Hinweis: Auf welche Weise ist der Torus aus Kreisen aufgebaut? Verwenden Sie Parametrisierungen von Kreisen, um eine Parametrisierung des Torus zu finden.