Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 30.4.2018

23. Berechnen Sie die induzierte Metrik des Katenoids

$$X : (u,v) \mapsto X(u,v) := O + e_1 \cosh(u)\cos(v) + e_2 \cosh(u)\sin(v) + e_3 u.$$

24. Zeigen Sie, dass eine Fläche $X : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathcal{E}^3$ genau dann konform parametrisiert ist, wenn die Parametrisierung Winkel erhält, das heißt, wenn Winkelmessung mit der induzierten Metrik das gleiche Ergebnis liefert wie Winkelmessung mit der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$.

    Hinweis für den Beweis der Rückrichtung der Äquivalenz: Verwenden Sie die orthogonalen Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Für diese gilt z.B. $\mathrm{d}_{(u,v)} X \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \sigma_u$.

25. Gegeben sei die Sphäre, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung. Sei $N = (0,0,1) \in S^2$ der Nordpol der Sphäre. Für jeden Punkt $(u,v,0)$ in der e_1e_2-Ebene legen Sie nun einen Gerade durch $(u,v,0)$ und N. Diese Gerade schneidet die Sphäre im Nordpol und in einem weiteren Punkt, $\Pi(u,v)$, und definiert so eine Abbildung,

$$\begin{aligned}\Pi : \mathbb{R}^2 &\to S^2 \subset \mathbb{R}^3,\\ (u,v) &\mapsto \Pi(u,v).\end{aligned}$$

    Berechnen Sie diese Abbildung Π. Was ist das Bild von Π? Was ergibt $\lim_{u\to\infty} \Pi(u,v)$?

    Nach Wahl eines Ursprungs $O \in \mathcal{E}^3$ definiert Π eine Abbildung X in $\mathcal{E}^3$,

$$\begin{aligned}X : \mathbb{R}^2 &\to \mathcal{E}^3,\\ (u,v) &\mapsto O + \Pi(u,v).\end{aligned}$$

    Vergewissern Sie sich, dass X eine reguläre Parametrisierung der Kugel ohne Nordpol ist. Ist diese Parametrisierung konform?

    Wie sieht das Bild einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ unter X aus? Wie sieht das Bild eines Kreises in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt im Ursprung unter X aus?

    Anmerkung: Die Umkehrabbildung, Π^{-1}, heißt stereographische Projektion.

26. Sei

$$\begin{aligned}X :\ \mathbb{R}^2 \supseteq U &\to \mathcal{E}^3,\\ (u,v) &\mapsto X(u,v) = O + e_1 u + e_2 v + e_3 z(u,v)),\end{aligned}$$

    wobei $z :\ U \to \mathbb{R}$ glatt ist.

    Berechnen Sie die Gauß-Abbildung und das Weingarten-Tensorfeld.

    Sei nun (u_0, v_0) ein stationärer Punkt der Funktion z. Wie sehen an diesem Punkt das Weingarten-Tensorfeld und die Gauß-Krümmung aus?