Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 7.5.2018

27. Angenommen eine Fläche

$$\begin{aligned} X :&\mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathcal{E}^3, \\ &(u,v) \mapsto X(u,v) = O + e_1 x + e_2 y + e_3 z, \end{aligned}$$

ist implizit durch eine Gleichung $F(x,y,z) = 0$ mit einer glatten Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F \neq 0$ dort wo $F(x,y,z) = 0$ gegeben. Es gilt also $F \circ (X - O) = 0$. Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung durch

$$N = \pm \frac{(\operatorname{grad} F) \circ (X - O)}{\|(\operatorname{grad} F) \circ (X - O)\|}$$

gegeben ist (grad bezeichnet den Gradienten, also den Vektor der partiellen Ableitungen).

28. Für $r > 0$ ist eine Parametrisierung der Möbiusschleife durch

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = O + (e_1 \cos(2u) + e_2 \sin(2u))(r + v\cos(u)) + e_3 v \sin(u)$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass $X(u + \pi, 0) = X(u, 0)$, aber $N(u + \pi, 0) = -N(u, 0)$.

29. Berechnen Sie die Gauß-Abbildung und den Weingartenoperator des Helikoids. Bestimmen Sie auch die mittlere Krümmung, die zwei Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen.

30. Untersuchen Sie, wie sich die erste und zweite Fundamentalform einer Fläche unter Reparametrisierungen und euklidischen Bewegungen ändern.