Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 14.5.2018

31. Sei $X : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathcal{E}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Normalenfeld N und
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 \supseteq \tilde{U} &\to U, \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) &\mapsto (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})), \end{aligned}$$
ein Diffeomorphismus, sodass $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Reparametrisierung von X mit Normalenfeld $\tilde{N} = N \circ \phi$ ist. Sei $J(\phi)$ gegeben durch
$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ gilt
$$\mathrm{d}\,\tilde{X}(\xi) = (\mathrm{d}\,X \circ \phi)(J(\phi)\xi), \qquad \mathrm{d}\,\tilde{N}(\xi) = (\mathrm{d}\,N \circ \phi)(J(\phi)\xi)$$
und daher
$$\tilde{I}(\xi, \eta) = I \circ \phi(J(\phi)\xi, J(\phi)\eta), \quad \tilde{I}I(\xi, \eta) = II \circ \phi(J(\phi)\xi, J(\phi)\eta).$$
Wie transformiert das Weingartentensorfeld unter der Reparametrisierung?

32. Zeigen Sie, dass alle Punkte einer Sphäre mit Radius $r > 0$ Nabelpunkte sind und berechnen Sie ihre Gauß- und mittlere Krümmung.

33. Finden Sie eine Parametrisierung $X : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathcal{E}^3$ des Helikoids so, dass X_u and X_v Hauptkrümmungsrichtungen sind.

34. Für $M \in \mathcal{E}^3$ und $\rho \in \mathbb{R}$ sei $D_{M,\rho}$ die Funktion
$$\begin{aligned} D_{M,\rho} : \mathcal{E}^3 &\to \mathbb{R}, \\ P &\mapsto \|P - M\|^2 - \rho^2. \end{aligned}$$
Dann beschreibt $D_{M,\rho}(P) = 0$ eine Kugel mit Mittelpunkt $M \in \mathcal{E}^3$ und Radius ρ.
Sei $X : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathcal{E}^3$ eine Fläche mit Gauß-Abbildung N.

    (a) Für einen Punkt $(u_0, v_0) \in U$, der kein Nabelpunkt ist, zeigen Sie, dass
    $$(D_{M,\rho} \circ X)(u_0, v_0) = 0, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial D_{M,\rho} \circ X}{\partial u} \\ \frac{\partial D_{M,\rho} \circ X}{\partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
    $$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial u \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial v \partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
    wenn $X_u x + X_v y$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, $\rho^2 = \frac{1}{\kappa^2}$ und
    $$M = X(u_0, v_0) + \frac{1}{\kappa(u_0, v_0)} N(u_0, v_0),$$
    wobei κ die zu $X_u x + X_v y$ gehörende Hauptkrümmung ist.

    (b) Zeigen Sie, dass man M und ρ genau dann so wählen kann, dass
    $$\begin{pmatrix} \frac{\partial D_{M,\rho} \circ X}{\partial u} \\ \frac{\partial D_{M,\rho} \circ X}{\partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial u \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 D_{M,\rho} \circ X}{\partial v \partial v} \end{pmatrix}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
    wenn (u_0, v_0) ein Nabelpunkt ist.