Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 28.5.2018

35. Sei X eine Fläche im $\mathcal{E}^3$, deren Bild auf einer Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt M liegt. Berechnen Sie den Krümmungstensor via

$$R\xi = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \xi - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \xi,$$

für ein Tangentialvektorfeld ξ, um zu zeigen, dass

$$R\xi = \frac{1}{r^2} \xi \times (X_u \times X_v).$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie, dass $N = \pm\frac{1}{r}(X - M)$, um $\nabla X_u = \mathrm{d}\, X_u - \langle \mathrm{d}\, X_u, N \rangle N$ zu berechnen.

36. Sei $X : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathcal{E}^3$ eine parametrisierte Fläche so, dass X_u und X_v Hauptkrümmungsrichtungen sind. Zeigen Sie, dass die Codazzi-Gleichungen für so eine Parametrisierung die Form

$$0 = \kappa_{1v} + \frac{E_v}{2E}(\kappa_1 - \kappa_2) = \kappa_{2u} - \frac{G_u}{2G}(\kappa_1 - \kappa_2)$$

haben.

37. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole für eine konform parametrisierte Fläche.

38. Zeigen Sie, dass die Gauß-Gleichung für eine konform parametrisierte Fläche die Gestalt

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \ln E$$

annimmt.

<u>Anleitung:</u>

(a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole ${\Gamma^i}_{jk}$ mit Hilfe der Koszul-Formeln (siehe voriges Beispiel).

(b) Verwenden Sie, dass die Matrixdarstellung des Krümmungstensors durch

$$R \simeq \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_2 - \frac{\partial}{\partial v}\Gamma_1 + [\Gamma_1, \Gamma_2]$$

gegeben ist, wobei

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} {\Gamma^1}_{i1} & {\Gamma^1}_{i2} \\ {\Gamma^2}_{i1} & {\Gamma^2}_{i2} \end{pmatrix} \qquad i \in \{1, 2\}.$$

39. Sei S das Weingartentensorfeld einer Fläche $X : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathcal{E}^3$ und ξ ein Tangentialvektorfeld. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S(\xi f) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S(\xi) f.$$