Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 4.6.2018

40. Sei N die Gaußabbildung einer Fläche $X : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathcal{E}^3$. Zeigen Sie, dass $N_{uv} = N_{vu}$ äquivalent zur Codazzigleichung ist.

41. Angenommen eine Fläche

$$\begin{aligned} X :&\mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathcal{E}^3, \\ &(u,v) \mapsto X(u,v) = O + e_1 x + e_2 y + e_3 z, \end{aligned}$$

ist implizit durch eine Gleichung $F(x,y,z) = 0$ mit einer glatten Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} F \neq 0$ dort wo $F(x,y,z) = 0$ gegeben. Es gilt also $F \circ (X - O) = 0$. Sei $Y : \mathbb{R} \supseteq I \mapsto \mathcal{E}^3$ eine Kurve auf dieser Fläche, also $F \circ Y = 0$.

Zeigen Sie, dass der natürliche Streifen von Y durch

$$N = +\frac{\operatorname{grad} F \circ Y}{\| \operatorname{grad} F \circ Y \|} \qquad \text{oder} \qquad N = -\frac{\operatorname{grad} F \circ Y}{\| \operatorname{grad} F \circ Y \|}$$

gegeben ist.

Verwenden Sie dies, um zu beweisen, dass die zwei Kurven

$$Y_\pm : t \mapsto Y_\pm(t) = O + e_1 + e_2 t \pm e_3 t$$

auf dem einschaligen Hyperboloid

$$\{O + e_1 x + e_2 y + e_3 z \in \mathcal{E}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$$

asymptotisch und prä-geodätisch, aber keine Krümmungslinien sind.

42. Beweisen Sie den Satz von Joachimsthal:

Angenommen zwei Flächen schneiden sich entlang einer Kurve so, dass die Kurve eine Krümmungslinie auf einer der beiden Flächen ist. Dann ist die Kurve auch eine Krümmungslinie auf der anderen Fläche genau dann, wenn sich die zwei Flächen in konstantem Winkel schneiden, also die Normalvektoren einen konstanten Winkel einschließen.

43. Beweisen Sie den Satz von Euler. Zeigen Sie dazu zuerst, dass Sie eine Basis (e_1, e_2) von $\mathbb{R}^2$ so wählen können, dass $d_{(u,v)}X(e_i)$ Krümmungsrichtungen von X bei $X(u,v)$ sind und und so, dass (e_1, e_2) orthonormal bezüglich der ersten Fundamentalform sind. Dann ist (e_1, e_2) orthogonal bezüglich der zweiten Fundamentalform. Betrachten Sie jetzt die Tangentialrichtung $e_\vartheta = e_1 \cos\vartheta + e_2 \sin\vartheta$.