Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 11.6.2018

44. Für einen Punkt $X(u,v)$ auf einer Fläche $X : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathcal{E}^3$, zeigen Sie, dass keine Asymptoten durch $X(u,v)$ laufen können, wenn $K(u,v) > 0$, und dass eine Asymptote in zwei verschiedenen Richtungen durch $X(u,v)$ laufen kann, wenn $K(u,v) < 0$. Was lässt sich im Fall $K(u,v) = 0$ sagen?

45. Sei $X : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathcal{E}^3$ eine Fläche, die längs einer Kurve $t \mapsto X(u(t), v(t))$ tangential zu einer Ebene ist. Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung K entlang der Kurve $t \mapsto X(u(t), v(t))$ verschwindet.

    Hinweise:

    - Die Gauß-Krümmung K ist die Determinante des Weingartentensorfeldes.
    - Ein Vektorraumendomorphismus hat einen nichttrivialen Kern genau dann, wenn seine Determinante verschwindet.

46. Seien X_1 und X_2 zwei Flächen, die sich längs einer Kurve Y so schneiden, dass ihre Gauß-Abbildungen linear unabhängig sind.

    Zeigen Sie, dass Y genau dann eine Prä-Geodätische von X_1 und X_2 ist, wenn Y in einer Geraden liegt.

47. Finden Sie alle Krümmungslinien, Asymptoten und Prä-Geodätischen auf einer Kugel mit zwei entfernten Punkten im $\mathcal{E}^3$.

48. Sei

$$\begin{aligned} X :\ & \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathcal{E}^3, \\ & (u,v) \mapsto X(u,v) := O + e_1 r(u)\sin v + e_2 r(u)\cos v + e_3 h(u) \end{aligned}$$

    eine Rotationsfläche.

    Zeigen Sie, dass

    (a) $r'(u_0) = 0$, falls der Breitenkreis $t \mapsto X(u_0, t)$ ein Geodätische ist, und dass
    (b) die Profilkurven $t \mapsto X(t, v)$ Geodätische sind, falls $r'^2 + h'^2 = 1$.