Klassische Differentialgeometrie (104.469)
Übungsblatt für den 18.6.2018

49. Finden Sie alle Geodätischen einer Ebene im $\mathcal{E}^3$ mit gegebenem Anfangspunkt und gegebener Anfangsrichtung.

50. Finden Sie alle Geodätischen mit gegebenem Anfangspunkt und gegebener Anfangsrichtung auf einer Einheitssphäre im $\mathcal{E}^3$.

Sei $X(u_0, v_0)$ ein Punkt auf einer Fläche $X : M \to \mathcal{E}^3$ und $exp : T_{(u_0,v_0)}X \to X(M)$ die Exponentialabbildung. Die Reparametrisierung von X durch *geodätische Polarkoordinaten* (r, ϑ) ist gegeben durch

$$(r, \vartheta) \mapsto X(r, \vartheta) := exp(e_1 r \cos\vartheta + e_2 r \sin\vartheta),$$

wobei (e_1, e_2) eine Orthonormalbasis des Tangentialraumes $T_{(u_0,v_0)}X$ ist (s. VO am 14.6.2018).

51. Parametrisieren Sie den aufgeschnittenen Zylinder

$$Z = \{O + e_1x + e_2y + e_3z \in \mathcal{E}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2, \;\; x > -r\}$$

mit Radius r mit geodätischen Polarkoordinaten.

Hinweis/mögliche Strategie: Geodätische und damit geodätische Polarkoordinaten hängen nur von der ersten Fundamentalform ab. Das Abwickeln des Zylinders in die Ebene ist eine Isometrie und ändert die erste Fundamentalform nicht. Finden Sie daher zuerst geodätische Polarkoordinaten für die Ebene und transferieren Sie sie dann auf den Zylinder.

52. Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung einer Fläche in geodätischen Polarkoordinaten (r, ϑ) durch

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}}$$

gegeben ist.