1. ÜBUNG MATHEMATIK 1 FÜR MB, WIMB UND VT
(LOGIK, UNGLEICHUNGEN UND SUMMENSCHREIBWEISE)

(1) Um aussagenlogische Formeln, wie etwa $(\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{C}$ auf ihre Richtigkeit zu überprüfen, müssen systematisch die Fälle unterschieden werden, in denen jeweils $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ richtig oder falsch sind. Dazu verwendet man oft Wahrheitstabellen. Eine solche würde für die obige Formel wie folgt aussehen:

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \Rightarrow C$
w	w	w	f	f	w
w	w	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f
f	f	w	w	f	w
f	f	f	w	f	w

(a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ genau dann gilt, wenn $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mit einer Wahrheitstabelle, für welche Wahrheitswerte von $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ die Aussage $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \vee (\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P})$ richtig ist.

(2) In die folgenden Schlussfolgerungen haben sich Fehler eingeschlichen. Korrigieren Sie:

(a) **Fakt:** Eine gerade Zahl ist durch 2 teilbar, eine Primzahl ist nur durch 1 und sich selbst teilbar.
Schlussfolgerung: Eine Primzahl kann nicht gerade sein.

(b) **Fakt:** Das Produkt zweier rationaler Zahlen ist rational.
Schlussfolgerung: Sind a und $a \cdot b$ rationale Zahlen, dann ist auch b rational.

(3) Eine Aussage $\mathbf{A}$ heißt *hinreichend* für $\mathbf{B}$, wenn $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ gilt. Eine Aussage $\mathbf{C}$ heißt *notwendig* für $\mathbf{B}$, wenn $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$ gilt.

Wie stehen die folgenden Aussagen zueinander?

(a) **A:** *„Die Fußballmannschaft X hat ein Tor erzielt.“*
B: *„Die Fußballmannschaft X hat das Spiel gewonnen.“*

(b) **C:** *„P ist ein Rechteck.“*
D: *„P ist ein Viereck und alle Innenwinkel sind gleich groß.“*

(c) **E:** *„x löst die Gleichung* $x^2 - 4x - 5 = 0$.*“*
F: *„x ist eine ganze Zahl.“*

(4) Um eine Aussage der Form $\forall x \in M : \mathbf{A}(x)$ (lies: „für alle Elemente x aus der Menge M gilt $\mathbf{A}(x)$“) zu *beweisen* muss man $\mathbf{A}(x)$ für *alle* x bestätigen. Um eine solche Aussage zu *widerlegen* genügt es allerdings *ein Gegenbeispiel* anzugeben, d.h., ein x für das $\mathbf{A}(x)$ nicht gilt.

Um eine Aussage der Form $\exists x \in M : \mathbf{A}(x)$ (lies: „es existiert ein Element x aus der Menge M für das $\mathbf{A}(x)$ gilt“) zu *beweisen* genügt es *ein Beispiel* anzugeben. Um eine solche Aussage zu *widerlegen* muss man zeigen, dass $\mathbf{A}(x)$ für *alle* x falsch ist.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{Z} : n(n+1)(n+2)$ ist durch 3 teilbar.

(b) $\forall\, a \in \mathbb{Q}\ \exists\, b \in \mathbb{Q} : ab = 1$.

(c) $\exists\, a, b \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = 6$.

(d) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N}, N > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N}, n > N : \frac{1}{n} < \epsilon$.
Hinweis: drücken Sie n für beliebiges ϵ durch ϵ aus, um ein geeignetes N zu finden.

Vereinfachen Sie folgende Aussage, wobei $\mathbf{A}(r)$ eine Aussage über eine reelle Zahl r ist:

(e) $\forall\, r \in \mathbb{R} : (\mathbf{A}(r) \Rightarrow r \neq 0)$.

(5) Drücken Sie folgende Sachverhalte „formal“ aus:

(a) Die reelle Funktion $f(x)$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
$\_\_\_\_\_\ x \in \mathbb{R} :\ \_\_\_\_\_\ =\ \_\_\_\_\_$

(b) Die reelle Funktion $f(x)$ hat kein Maximum in $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} :\ \_\_\_\ y \in \mathbb{R} :\ \_\_\_\_\_\ \ \_\_\_\ f(x)$

(c) Die Aussage $\mathbf{A}(x)$ gilt für alle genügend großen reellen Zahlen x.
$\exists N \in \mathbb{R} : \forall\ \_\_\_\_\_\ > N :\ \_\_\_\_\_$

(6) Mit $|x|$ bezeichnet man den Absolutbetrag von x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen im Bereich der reellen Zahlen! Das heißt, finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, sodass die jeweilige Gleichung bzw. Ungleichung erfüllt ist.

(a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (b) $x^2 - 3x + 2 > 0$

(c) $x^2 - |3x + 1| + 1 = 0$ (d) $x^2 - |3x + 1| + 1 < 0$

Hinweis: Unterscheiden Sie, ob $3x + 1$ größer oder kleiner als 0 ist.

(7) Für welche Zahlen $x \neq 0$ gilt $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} \geq 2$? Zeigen Sie dann, dass $(\frac{2}{x} + \frac{x}{2})^2 \geq 2^2$ immer wahr ist. Hinweis: multiplizieren Sie die erste Ungleichung mit $2x$, und unterscheiden Sie, ob x größer oder kleiner als 0 ist.

(8) Statt $a_{17} + a_{18} + \cdots + a_{25}$ schreibt man besser $\sum_{k=17}^{25} a_k$. Der Buchstabe k heißt dann *Summationsindex*, 17 ist die *untere Summationsgrenze*, 25 die *obere Summationsgrenze* und die a_k heißen *Summanden*. Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{m=3}^{6}(2m+1)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

Wieviele Summanden haben diese Summen jeweils?

Schreiben Sie für folgende drei Gleichungen alle Summanden der linken Seite auf, und ergänzen Sie auf der rechten Seite die fehlenden Werte, sodass auf beiden Seiten gleich viele Summanden stehen.

(c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{9}(3n+2) = \sum_{k=0}^{\square}(3k + \square)$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k = \sum_{g=1}^{\square} 2g + \sum_{u=\square}^{\square}(2u+1)$

(e) $\displaystyle\sum_{\square}^{5}(k+1)^2 = \sum_{k=3}^{\square}(k-1)^2$

Witz: Drei Logiker kommen in eine Bar. Barkeeper: „*Bier für alle?*“ Erster Logiker: „*Weiß ich nicht.*“ Zweiter Logiker: „*Weiß ich nicht.*“ Dritter Logiker (freudig): „*Ja!*“

Übungsaufgaben für das Repetitorium

(1) Erstellen Sie Wahrheitstabellen für $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ und $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}$.

(2) Sind die Aussagen $((\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{A}$ und $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$ äquivalent?

(3) Sei **B** die Aussage *„ich besitze ein Fahrrad“* und **K** die Aussage *„ich kann radfahren“*.

(a) Ist **B** hinreichend für **K**?

(b) Ist **B** notwendig für **K**?

(c) Gilt $(\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{K}) \vee (\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{B})$?

(4) Beweisen oder widerlegen Sie:
  (a) $\exists\, a, b \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = 8.$
  (b) $\forall\, x \in \mathbb{Z} : \exists\, y \in \mathbb{Z} : x + y = 0.$
  (c) $\exists\, n \in \mathbb{N} : \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 : \epsilon \cdot n > 1$
  (d) $\exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N}, n > N : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}.$

(5) Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen im Bereich der reellen Zahlen!

(a) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(b) $x^2 - 5x - 6 < 0$

(c) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$

(d) $x^2 - 5|x| - 6 < 0.$

(e) $x^2 - 5|x| + 6 > 0.$

(f) $x^2 - 5|x| + \frac{25}{4} = 0.$

(6) Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} k^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{99} (1-x)x^k$

(7) Schreiben Sie für folgende drei Gleichungen alle Summanden der linken Seite auf, und ergänzen Sie auf der rechten Seite die fehlenden Werte.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k = \sum_{k=\square}^{\square} (k-1)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=\square}^{6} 2(k+1) = \sum_{k=3}^{\square} 2(k-3)$