5. März 2008
Risiko- und Ruintheorie, F. Hubalek (WS 2007/08)

Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt, bitte alle Zwischenschritte angeben

---

1. Betrachten Sie zwei unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen W und X mit Parametern $\lambda > 0$ bzw. $\mu > 0$. Die Dichten lauten also (6 Pkt.)

$$f_W(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \lambda e^{-\lambda x} \qquad\qquad f_X(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \mu e^{-\mu x} .$$

   (a) Bestimmen Sie die Dichten von $-X$ und von $W - X$. (2)

   Betrachten Sie nun ein Cramer-Lundberg-Modell mit Anfangskapital 1, Prämienrate 1, Intensität 1 und exponentialverteilten Schäden, die jeweils Erwartungswert 1/2 besitzen.

   (b) Schätzen Sie die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ mittels Cramer-Lundberg-Ungleichung ab! (1)

   (c) Wie groß ist die exakte Ruinwahrscheinlichkeit? (1)

   (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den ersten Schaden zu überleben? (2)

2. Ein Gesamtschaden wird als Zufallssumme dargestellt, wobei die Zahl der Einzelschäden Poisson-verteilt mit Parameter 2 ist und die Einzelschäden jeweils stetig gleichverteilt auf $(0, 2)$ sind. (6 Pkt.)

   (a) Bestimmen Sie die Prämie für den Gesamtschaden nach dem Erwartungswertprinzip mit 5% Sicherheitszuschlag! (1)

   (b) Bestimmen Sie die Prämie nach dem Varianz- und dem Standardabweichungsprinzip, jeweils mit 4% Sicherheitszuschlag! (1)

   (c) Bestimmen Sie die Prämie nach dem Exponentialprinzip mit Risikoaversionsparameter 1.1.(2)

   (d) Angenommen, zwei Versicherungen benutzen das Exponentialprinzip mit Risikoaversionsparametern 1.1 und 1.3 und teilen sich die Versicherung des Gesamtschadens. Wie sieht die optimale Aufteilung des Schadens und die optimalen Prämien aus, wenn die Summe der Prämien minimiert werden soll? (2)

3. (a) Gegeben sei eine Folge von iid. Zufallsvariablen $(X_k)_{k\geq 1}$, wobei $\mathbb{E}[e^{X_1}] < \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $\nu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass (6 Pkt.)

$$S_n = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \nu n\right)$$

   ein Martingal definiert, und drücken Sie ν durch $\mathbb{E}[e^{X_1}]$ aus! (3)

   (b) Gegeben sei eine iid. Folge $(Y_i)_{i\geq 1}$ von gammaverteilten Zufallsvariablen mit Dichte

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(2)} y e^{-y} \mathbb{1}_{y>0},$$

   sowie eine davon unabhängige binomialverteilte Zufallsvariable N mit Parametern $\tilde{N} = 15$ und $p = 1/3$. Bestimmen Sie die momentenerzeugende Funktion der Zufallssumme

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

   sowie $\mathbb{E}[S]$ und $Var(S)$! (3)