Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

8. Oktober 2013

1. Übung

1. Bestimmen Sie die Dichte und Verteilungsfunktion von $Y = X_1 + X_2$, wobei $X_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_2)$ unabhängige Zufallsvariable mit Parametern $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ sind, indem sie erst die Dichten falten, und dann das Ergebnis integrieren.

2. Ebenso, allerdings sollen Sie erst die Verteilungen falten, und dann das Ergebnis differenzieren.

3. Wie die beiden obigen Beispiele, aber für X_1, X_2 iid $\operatorname{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

4. Gegeben sind zwei Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}_+$, nämlich
$$F_1(x) = 1 - p_1 e^{-\lambda_1 x}, \quad x \geq 0, \tag{1}$$
und
$$F_2(x) = 1 - p_2 e^{-\lambda_2 x}, \quad x \geq 0, \tag{2}$$
wobei die Parameter $0 < p_1 < p_2 < 1$ und $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ erfüllen. Berechnen Sie die Faltung $F_1 * F_2$.

5. Gegeben sind vier unabhängige Bernoulli-Variable $D_i \sim \operatorname{Ber}(1/i)$ für $i = 1, \ldots, 4$. Bestimmen Sie die Verteilung von $N = D_1 + \cdots + D_4$.

6. Ebenso für $n = 10$ Bernoulli-Variable (mit Computer).

7. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$, wobei $X \sim \operatorname{Poi}(\lambda)$ und $Y \sim \operatorname{Poi}(\mu)$ unabhängige Zufallsvariable mit Paramtern λ, $\mu > 0$ sind. Zeigen Sie
$$\operatorname{Poi}(\lambda)^{*n} = \operatorname{Poi}(n\lambda).$$

8. Sei $V \sim \operatorname{Exp}(0.2)$ und
$$F_U(x) := 0.7 I(x) + 0.3 F_V(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable U, wobei

$$I(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie $F_U(x)$ für $-2 \leq x \leq 10$ und berechnen Sie $\mathbb{E}[U]$ sowie $\mathbb{V}[U]$.

9. Gegeben seien $2n$ unabhängige Zufallsvariable $C_1, \ldots C_n, D_1, \ldots, D_n$, wobei $\mathbb{P}[C_i \leq x] = P_i(x)$ und $D_i \sim \mathrm{Ber}(q_i)$, $0 \leq q_i \leq 1$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Zufallsvariable $X_i := C_i D_i$ die Verteilungsfunktion

$$F_{X_i} = (1 - q_i)I + q_i P_i$$

besitzt. Zeigen Sie weiters

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbb{E}[C_i],$$

sowie

$$\mathbb{V}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \big(q_i \mathbb{V}[C_i] + (1 - q_i) q_i \mathbb{E}[C_i]^2\big).$$