Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

8. Januar 2014

11. Übung

1. a) Es sei $(Z(t) : t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda = 4$. Berechnen Sie die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[Z(3)|Z(1)]$.

   b) Berechnen Sie das gemischte Moment $\mu_{21}(1,3) = \mathbb{E}[Z(1)^2 Z(3)]$.

   Sie können und sollen (ohne Beweis) folgendes Resultat verwenden. Ist N eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[N] = \nu$, dann gilt $\mathbb{E}[N^2] = \nu + \nu^2$ und $\mathbb{E}[N^3] = \nu + 3\nu^2 + \nu^3$.

2. Gegeben ist ein Poissonprozeß (N_t) und eine Zahl $a > 0$. Zeigen Sie, daß (N_{at}) ein Poissonprozeß ist.

3. Es sei bekannt, dass die Zahl der eintretenden Schäden Poisson mit Parameter λ ist, und dass jeder einzelne eingetretene Schaden mit derselben Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ dem Versicherer gemeldet wird. Zeigen Sie, dass die Zahl der gemeldeten Schäden Poisson mit Parameter $p\lambda$ ist. (Das Phänomen, dass auch Schäden gemeldet werden, die gar nicht eingetreten sind, bleibe hier außer Betracht.)

4. Gegeben sind zwei unabhängige Poissonprozesse (M_t) und (N_t) mit Parameter μ bzw λ. Zeigen Sie, dass $(M_t + N_t)$ ein Poissonprozess ist.

5. Angenommen (N_t) ist ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass der kompensierte Poisson-Prozess $(\tilde{N}_t)$ mit $\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$ ein Martingal ist.

6. Sei $\theta \in \mathbb{R}$, (S_t) ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ und Schäden mit $E[e^X] < \infty$. Zeigen Sie, es gibt eine Funktion $a(t)$ sodass $S_t a(t)$ ein Martingal ist, und ermitteln sie diese Funktion.