Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

16. Oktober 2013

2. Übung

1. Sei $\alpha > 0$ und $X \sim \operatorname{Exp}(\alpha)$.
   a) Zeigen Sie
   $$M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}, \quad \operatorname{Re}(t) < \alpha.$$
   b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$ durch differenzieren oder Reihenentwickung von $M_X(t)$.

2. Sei $\lambda > 0$ und $X \sim \operatorname{Poi}(\lambda)$.
   a) Zeigen Sie
   $$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad t \in \mathbb{C}.$$
   b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$ durch differenzieren oder Reihenentwickung von $M_X(t)$.

3. Sei $\lambda > 0$ und $\mu > 0$. Zeigen Sie $\operatorname{Poi}(\lambda) * \operatorname{Poi}(\mu) = \operatorname{Poi}(\lambda + \mu)$ mit Hilfe der MEF.

4. Leiten Sie die Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Zufallssumme unter Verwendung der MEF der Zufallssumme her.

5. Finden Sie zwei *abhängige* Zufallsvariablen X und Y, für die
   $$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
   gilt.
   Hinweis: Dies ist bereits auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum möglich.

6. Zeigen Sie $\Gamma(n, \alpha) = \operatorname{Exp}(\alpha)^{*n}$.

7. a) Wiederholen Sie die Definition der auf eine σ-Algebra bedingten Erwartung.
   b) Gegeben sei eine Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sowie eine Ereignis $B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(B) \in (0, 1)$. Zeigen Sie
   $$\mathbb{E}[X | \sigma(B)] = \mathbb{E}[X | B] \mathbf{1}_B + \mathbb{E}[X | B^\complement] \mathbf{1}_{B^\complement}.$$

8. Unter Verwendung der Notation der Vorlesung, zeigen Sie

$$(pI + qG)^{*n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qG)^{*k} * (pI)^{*(n-k)}.$$

9. Unter Verwendung der Notation der Vorlesung, zeigen Sie

$$M_{S^{\mathrm{ind}}}(t) = M_{S^{\mathrm{coll}}}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$