Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

23. Oktober 2013

3. Übung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. Die σ-Algebra $\mathcal{G}$ sei von der Partition $(B_i)_{i=1}^n$ erzeugt. Zeigen Sie für $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$,
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{1}_{\{B_i\}},$$
wobei $b_i := \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(B_i)}$.

2. Zeigen Sie für $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,
$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{1}_{\{B_i\}},$$
wobei $b_i := \frac{1}{\mathbb{P}(B_i)} \int_{B_i} X \, d\mathbb{P}$.

3. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Sei X_i, $i = 1,\ 2$ die Augenzahl des i-ten Wurfs. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2]$.

4. Sei $\omega_1 \in \{X_1 + X_2 = 2\}$, $\omega_2 \in \{X_1 + X_2 = 3\}$, $\omega_3 \in \{X_1 + X_2 = 8\}$. Interpretieren Sie die Zahlen $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2](\omega_1)$, $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2](\omega_2)$ sowie $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2](\omega_3)$.

5. Sei $(B_i)_{i=1}^\infty$ eine unendliche Partition von Ω, $A \in \mathcal{F}$ und
$$\phi = \sum_{i=1}^\infty b_i \mathbf{1}_{B_i}.$$
Unter welchen Bedingunen an $(b_i)_{i=1}^\infty$ ist $\phi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wählen Sie die Folge $(b_i)_{i=1}^\infty$ so, dass
$$\|\phi - \mathbf{1}_A\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \sqrt{\int_\Omega (\phi - \mathbf{1}_A)^2 \, d\mathbb{P}}$$

minimiert wird. Zeigen Sie, dass für diese Wahl der $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ die Funktion $\phi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und

$$\int_{B_i} \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} = \int_{B_i} \phi \, d\mathbb{P}.$$

6. Sei $Z_1 := X_1 + Y$ und $Z_2 := X_2 + Y$, wobei X_1, X_2 und Y unabhängige, integrierbare Zufallsvariable sind, für die $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2]$ gilt. Zeigen Sie $\mathbb{E}[Z_1 | Z_2] = Z_2$ f.s.

7. Seien X unf Y integrierbare Zufallsvariable, sodass $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ f.s. und $\mathbb{E}[Y|X] = X$ f.s. Zeigen Sie, dass $X = Y$ f.s.
   Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{E}[\arctan(X)(X - Y)]$.

8. Sei X eine auf $[0, \pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[X | \sin(X)] = \frac{\pi}{2}.$$

   Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]$ für $A = \{\sin X \in B\} = \{X \in C\}$, wobei B und C Borel-Mengen von $[0, 1]$ und $[0, \pi]$.

9. Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$. Gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}]$$

   immer?
   Hinweis: Finden Sie ein Gegenbeispiel.