

Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

30. Oktober 2013

4. Übung

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $p_n := \mathbb{P}(N = n)$.

1. Zeigen Sie: Sei $N \sim \text{Bin}(m, \vartheta)$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b > 0$, sodass

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

und bestimmen Sie a und b .

2. Zeigen Sie: Sei $N \sim \text{Poi}(\alpha)$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b > 0$, sodass (1) gilt, und bestimmen Sie a und b .
3. Zeigen Sie: Sei $N \sim \text{NB}(\beta, \vartheta)$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b > 0$, sodass (1) gilt, und bestimmen Sie a und b .
4. Die Zähldichte einer Zufallsvariable N erfülle die Rekursion (1), wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a + b > 0$. Zeigen Sie N genügt entweder einer Binomial-, Poisson- oder Negativbinomial-Verteilung.

Hinweis: Bestimmen Sie eine positive Lösung der lineare Differenzgleichung

$$h_{n+1} - \left(a + \frac{b}{n+1}\right)h_n = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ unter der Bedingung $\sum_{n=0}^{\infty} h_n = 1$. Siehe Vorlesung ...

5. Zeigen Sie: Sei $N \sim \text{Geo}(\vartheta)$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $2a + b > 0$, sodass

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

6. Gegeben seien zwei reelle Zahlen $\nu > 0$ und $\alpha > 0$.

- a) Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$, eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf \mathbb{R}_+ definiert.

b) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$, symbolisch $X \sim \text{Gam}(\nu, \alpha)$, zeigen Sie $\mathbb{E}[X] = \frac{\nu}{\alpha}$.

c) Zeigen Sie $\mathbb{V}[X] = \frac{\nu}{\alpha^2}$.

7. Sei $\nu > 0$, $\alpha > 0$ und $X \sim \text{Gam}(\nu, \alpha)$. Zeigen Sie

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t} \right)^\nu, \quad t < \alpha.$$

8. Sei $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$, $\alpha > 0$. Zeigen Sie $\text{Gam}(\nu_1, \alpha) * \text{Gam}(\nu_2, \alpha) = \text{Gam}(\nu_1 + \nu_2, \alpha)$.