Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

6. November 2013

5. Übung

1. Zeigen Sie: Jedes Martingal ist ein Martingal bzgl. seiner natürlichen Filtrierung.
2. Zeigen Sie: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
3. Zeigen Sie: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn für alle $n \geq m$ und $A \in \mathcal{F}_m$
$$\int_A X_n \, dP = \int_A X_m \, dP$$
gilt.
4. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein integrierbarer Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen, d.h. $X_{n+1} - X_n$ sei unabhängig von $X_1, \ldots, X_n$. Zeigen Sie $(X_n - E[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Martingal.
5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, integrierbaren Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Folge $S_n := \sum_{k=1}^n X_n$ ist ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ und $\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$.
6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, integrierbaren Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Folge $M_n := \prod_{k=1}^n X_k$ ist ein Martingal sowohl bzgl. seiner natürlichen Filtrierung $\sigma(M_1, \ldots, M_n)$, als auch bzgl. $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Sind diese zwei Filtrierungen immer gleich?
7. Gegeben sei eine einfache Irrfahrt $(X_n)_{n\geq 0}$, also
$$X_n = \sum_{k=1}^n Z_k$$
wobei $(Z_n)_{n\geq 1}$ iid mit $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. Weiters sei $Y_n = e^{X_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie ein Martingal $(S_n)_{n\geq 0}$, mit
$$S_n = \exp\left(-\sum_{i=0}^{k-1} \delta_i\right) Y_n,$$

indem Sie einen geeigneten (adaptierten) Prozeß$(\delta_n)_{n\geq 0}$ bestimmen.

8. Der Prozeß$(S_n)_{n\geq 0}$ aus Aufgabe 7 ist ein positives Martingal. Sei $M = \max(S_0, S_1, S_2, S_3)$.
   a) Berechnen Sie $E[M]$.
   b) Berechenen Sie $P(M \geq 2.5)$.
   c) Schätzen Sie $P(M \geq 2.5)$ mit der Markov-Ungleichung für M ab.
   d) Schäzen Sie $P(M \geq 2.5)$ mit der Kolmogorv-Doob-Ungleichung für positive Submartingale, angewandt auf (S_0, S_1, S_2, S_3) ab.

   Runden Sie Ihre Ergebnisse auf vier Nachkommastellen! Hinweis für 8a und 8b: Einfach die acht möglichen Fälle betrachten, raffiniertere Methoden würden im Moement zu weit führen.