Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

13. November 2013

6. Übung

1. Zeigen Sie ein mit einer Stoppzeit gestopptes Submartingal ist wieder ein Submartingal. Folgern Sie daraus analoge Resultate für Supermartingale und Martingale.

2. Gegeben sei eine einfache Irrfahrt $(X_n)_{n\geq 0}$ und $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$. Zeigen Sie, dass das Optional Stopping Theorem nicht gilt. Weisen Sie konkret nach, dass die Voraussetzungen aller diesbezüglichen Varianten des Optional Stopping Theorems aus der Vorlesung verletzt sind.
   Hinweis: Schlagen Sie wenn nötig die Verteilung von τ nach.

3. Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass die folgende Aussage im Allgemeinen nicht richtig ist: Ist (X_n) ein Submartingal, und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $E[|\phi(X_n)| < \infty$, dann ist $(\phi(X_n))$ ein Submartingal.

4. Der Prozeß (S_k) sei adaptiert und integrierbar. Weiters sei $E[S_k] = S_0$ konstant. Folgt daraus, daß (S_k) ein Martingal ist? Geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

5. Zeigen Sie für quadratisch integrierbare Martingaldifferenzen $E[Y_n] = 0$ und
$$\mathrm{Cov}[Y_n, Y_{n+k}] = 0.$$

6. Sei T eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F})_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n,\ n \geq 0\}$ ist eine σ-Algebra.

7. Gegeben sei die deterministische Stoppzeit $T := n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$.

8. Bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F})_{n\in\mathbb{N}}$ sei T eine Stoppzeit. Man beweise $\mathcal{F}_{T\wedge n} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

9. S und T seien Stoppszeiten bzgl. derselben Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist auch $S+T$ eine Stoppzeit bzgl. dieser.