Übungsbeispiele Risiko- und Ruintheorie

Friedrich Hubalek Piet Porkert

20. November 2013

7. Übung

1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, τ, σ Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{N}$ und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpretieren Sie unter diesen Umständen die Gleichungen:
$$
\begin{aligned}
E[M_n|\mathcal{F}_m] &= M_m, \quad m \leq n,\\
E[M_n|\mathcal{F}_\sigma] &= M_{n\wedge\sigma},\\
E[M_\tau|\mathcal{F}_m] &= M_{\tau\wedge m},\\
E[M_\tau|\mathcal{F}_\sigma] &= M_{\tau\wedge\sigma}.
\end{aligned}
$$

2. Gegeben sei eine einfache Irrfahrt $(X_n)_{n\geq 0}$ und $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}$. Wären die Bedingungen für eines der beiden Optional Stopping Theoreme erfüllt, so würde $E[X_\tau|\mathcal{F}_0] = X_0$ gelten. Gilt diese Gleichheit? Schlagen Sie die Verteilung von τ nach. Wiederholen Sie die beiden in der Vorlesung kennengelernten Versionen des Optional Stopping Theorems. Welche Voraussetzung ist im ersten und welche im zweiten Beispiel nicht erfüllt?

3. Zeigen Sie:
   a) Jede Teilfolge einer austauschbaren Folge ist austauschbar.
   b) Austauschbare Zufallsvariable sind identisch verteilt.
   c) Eine Folge austauschbarer Zufallsvariablen ist strikt stationär. (Schlagen Sie ev. die Definition für *strikt stationär* nach.)

4. Es sei $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Prozeß mit austauschbaren Inkrementen, dann kann S nach dem Satz von de Finetti als gewichteter random walk dargestellt werden. Angenommen die bedingte Verteilung der Inkremente (X_n) ist durch die Verteilungsfunktion $F(x, \theta)$ gegeben, und der Parameter θ habe die Verteilungsfunktion $U(\theta)$, und alle vorkommenden Momente existieren. Drücken Sie $E[|X_1X_2 \ldots X_n|^r]$ durch F und U aus.

5. Zeigen Sie, wenn eine Zufallsvariable X unabhängig von der iid Folge (X_n), $n = 1, 2, \ldots$ ist, dann ist (Y_n) definiert durch $Y_n = X + X_n$ eine Folge austauschbarer Zufallsvariablen. Drücken Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von $(Y_1, \ldots, Y_n)$ durch die Verteilungsfunktionen von X und X_i aus. Welche Verteilung hat $(Y_1, \ldots, Y_n)$ wenn X und X_i unabhängige $N(0, 1)$ Zufallsvariablen sind.

6. Gegeben sei eine einfache Irrfahrt $(X_n)_{n \geq 0}$. Zeichnen Sie die Pfade der dualen Ereignisse $\{X_1 > 0, \ldots, X_7 > 0,\ 4 \leq X_8 \leq 8\}$ und $\{X_8 > X_i \text{ for } i = 1, \ldots, 7, 4 \leq X_8 \leq 8\}$.

7. Verifizieren Sie das Resultat von Dwass und Dinges

$$P[S_1 < y, \ldots, S_{n-1} < y, S_n = y] = \frac{y - x}{n} P[S_n = y]$$

für die symmetrische Binomial-Irrfahrt, indem Sie die Wahrscheinlichkeiten auf beiden Seiten der Gleichung explizit ausrechnen.

Hinweis: Spiegelungsprinzip.