Name: ______________________ Schriftlich: ____________

Matr.Nr.: ______________________ AssistentIn: Kleinert ________

Kennzahl: ______________________ Mündlich: ____________

Beispiel	1	2	3	Σ
Punkte				

Gesamtnote: ____________

Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Prüfung aus Sachversichungsmathematik (90 Minuten), 20.6.2011

Dr. Kainhofer

Unterlagen und Taschenrechner sind erlaubt!

(4 Punkte) 1. Es sei $S \sim \mathrm{CP}(\lambda = 6; X)$ mit $\mathbb{P}(X = k) = p_k = \frac{k^3}{36}$ für $k \in \{1, 2, 3\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S = k)$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ indem Sie S in eine Linearkombination von Poissonverteilungen zerlegen und dann falten.

(4 Punkte) 2. Sei $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine streng monoton wachsende und konvexe Funktion. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathcal{L}^k\big([0, \infty)\big)$ die Menge aller diskreten Zufallsvariablen $X : \Omega \to [0, \infty)$ mit $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$. Sei weiters

$$\mathcal{L} := \Big\{X \in \mathcal{L}^0\big([0, \infty)\big) : g(X) \in \mathcal{L}^2\big([0, \infty)\big)\Big\}$$

und betrachten Sie die Verlustfunktion

$$L : \begin{cases} \mathcal{L} \times [0, \infty) \to [0, \infty) \\ \qquad (S, a) \mapsto \mathbb{E}\Big(\big(g(S) - g(a)\big)^2\Big) \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(*i*) Für $S \in \mathcal{L}$ besitzt die Abbildung

$$L_S : \begin{cases} [0, \infty) \to [0, \infty) \\ \qquad a \mapsto L(S, a) \end{cases}$$

ein eindeutiges Minimum an der Stelle $\mathcal{H}(S) := g^{-1}\big(\mathbb{E}(g(S))\big)$.
Hinweis: Minimieren Sie zunächst die Funktion $b \mapsto \mathbb{E}\big((X - b)^2\big)$ für $X \in \mathcal{L}^2\big([0, \infty)\big)$, $b \in [0, \infty)$ und nutzen Sie dann die Eigenschaften von g.

(*ii*) Es gilt $\mathbb{E}(S) \le \mathcal{H}(S)$ für alle $S \in \mathcal{L}$.

(*iii*) Für $g(x) = e^{\gamma x}$ mit $\gamma > 0$ stimmt das Prämienprinzip $\mathcal{H}(S)$ mit dem Exponentialprinzip mit Parameter γ überein.

(4 Punkte) 3. Berechnen Sie für ein Negativbinomial-Beta-Modell, d.h. $X|(\Theta = \theta) \sim \mathrm{NB}(r, \theta)$ wobei $\Theta \sim \mathrm{Be}(\alpha, \beta)$ und $\alpha, \beta, r > 0$, die exakte Credibility Schätzfunktion $\overline{e}(x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Credibilityfaktor z, falls $\overline{e}$ die Gestalt einer Credibilityformel hat.