Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 1

Im Folgenden seien $X, X_1, X_2, \ldots$ reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Man sagt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen X in Wahrscheinlichkeit*, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Man schreibt dafür auch $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert fast sicher* gegen X, falls gilt

$$\mathbb{P}\big(\big\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\big\}\big) = 1.$$

1. (i) Zeigen Sie, dass $X_n \to X$ fast sicher genau dann, wenn $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.o.}) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

   (ii) Zeigen Sie, dass die Umkehrung des Satzes von Borel–Cantelli (ohne der Voraussetzung der Unabhängigkeit) im Allgemeinen nicht gilt. Betrachten Sie dazu den Warscheinlichkeitsraum $\big((0,1), \mathfrak{B}(0,1), \lambda\big)$, wobei λ das Lebesguemaß bezeichnet.

2. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ genau dann, wenn für jede Teilfolge $(X_{n(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $(X_{n(m(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert die fast sicher gegen X konvergiert.

3. Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängig identisch verteilt mit $\mathbb{E}(X_i) = 0$ und $\mathbb{E}(X_i^4) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, dann gilt $\frac{S_n}{n} \to 0$ fast sicher für $n \to \infty$. (Version des starken Gesetzes der Großen Zahlen)
   Hinweis: Schätzen Sie $\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, mit Hilfe der Chebyshev Ungleichung ab. Überlegen Sie sich, dass

   $$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}\Big(\big(\sum_{i=1}^n X_i\big)^4\Big) = \mathbb{E}\bigg(\sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} X_i X_j X_k X_l\bigg)$$

   und benutzen Sie die Unabhängigkeit um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen.

4. Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängig mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$. Zeigen Sie, dass

   (i) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ genau dann, wenn $p_n \to 0$.

   (ii) $X_n \to 0$ fast sicher genau dann, wenn $\sum_{n=1}^\infty p_n < \infty$.

5. Sei X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X. Zeigen Sie, dass φ_X gleichmäßig stetig ist mit $|\varphi_X(t)| \leq \varphi(0) = 1$, $t \in \mathbb{R}^d$. Weiters gilt $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi}_X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.