Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 10

1. Seien $X, Y \in \mathcal{P}^2$. Zeigen Sie mit Hilfe des vergleichbaren Satzes für Prozesse aus $\mathcal{E}_\mathrm{b}$ folgende Eigenschaften des Itô-Integrals:

   (i) $(X.B)_0 = 0$ f.s.

   (ii) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt
   $$(\alpha X + \beta Y).B = \alpha(X.B) + \beta(Y.B).$$

   (iii) Für $t \geq s$ gilt
   $$\mathbb{E}[(X.B)_t^2 - (X.B)_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t X_u^2 du | \mathcal{F}_s\right] \quad \text{f.s.}$$

   (iv) $Z_t := (X.B)_t^2 - \int_0^t X_u^2 du$, $t \geq 0$, ist ein Martingal.

2. Zeigen Sie, dass für eine standardisierte Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t \geq 0}$ gilt: $B \notin \mathcal{P}^2$, aber $B \in \mathcal{P}^2[0, T]$ für jedes $T \geq 0$. Berechnen Sie weiters das Integral
   $$(B.B)_T = \int_0^T B_s dB_s, \quad T \geq 0,$$
   indem Sie B geeignet durch eine Folge in $\mathcal{E}_\mathrm{b}$ approximieren.
   Hinweis: Wählen Sie eine Folge von Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{t_j^n : j = 0, \ldots, k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, des Intervals $[0, T]$ mit $|\mathcal{Z}| \to 0$ und betrachten Sie die Approximation
   $$(X_n)_t := \sum_{i=1}^{k_n} B_{t_{i-1}^n} \mathbf{1}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}(t), \quad t \in [0, T], n \in \mathbb{N}.$$
   Verwenden Sie die Gleichung $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b-a)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, um das elementare Itô-Integral von X_n umzuformen.

3. Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung und $T > 0$ fest. Zeigen Sie, dass
   $$\int_0^T t dB_t = T B_T - \int_0^T B_t dt$$

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X die bezüglich d gegen x konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $(y_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge in X die bezüglich d gegen x_n konvergiert. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $m(n)$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, sodass $d(y_{n,m(n)}, x) \to 0$ für $n \to \infty$.