Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 11

1. Seien σ und τ zwei Stoppzeiten bezüglich einer vollständigen und rechtsstetigen Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Verwenden Sie das Optional Sampling Theorem um zu zeigen, dass die Operatoren der bedingten Erwartung $E^{\mathcal{F}_\sigma}$ und $E^{\mathcal{F}_\tau}$ auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ vertauschen und ihr Produkt durch $E^{\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}}$ gegeben ist.
   Hinweis: Betrachten Sie für ein $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ das Martingal $M_t := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$, $t \geq 0$.

2. Sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Prozess $g(B) : (\omega, t) \mapsto g(B_t(\omega))$ in der Klasse $\mathcal{P}^2_{\text{loc}}[0, T]$ liegt, aber nicht notwendigerweise in $\mathcal{P}^2[0, T]$.
   Hinweis: Um eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu finden, sodass $g(B) \notin \mathcal{P}^2[0, T]$ betrachten Sie die Funktion $g(t) = e^{t^4}$.

Sei $\mathcal{F}$ eine rechtsstetige und vollständige Filtration auf $\mathbb{R}_+$. Ein Prozess M heißt *lokales Martingal* falls er an $\mathcal{F}$ adaptiert ist und es eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \nearrow \infty$ f.s. gibt, sodass der Prozess $M^{\tau_n} - M_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist. Die Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man *lokalisierende Folge für M*.

3. Sei $X \in \mathcal{P}^2_{\text{loc}}$. Zeigen Sie, dass dann $X.B$ ein lokales Martingal ist und jede lokalisierende Folge für X auch eine lokalisierende Folge für $X.B$ ist.

4. Zeigen Sie, dass jedes lokale beschränkte Martingal ein Martingal ist.