Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 12

Zur Wiederholung: Ein Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ heißt *Itô-Prozess* mit *Diffusionskoeffizient* $U = (U_t)_{t\geq 0}$ und *Drift* $V = (V_t)_{t\geq 0}$, falls

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s ds + \int_0^t U_s dB_s, \quad t \geq 0,$$

mit $U, \sqrt{|V|} \in \mathcal{P}^2_{\text{loc}}[0,T]$ für alle $T \geq 0$. Für reellwertiges $F \in C^2(\mathbb{R})$ gilt die *Itô-Formel* f.s.

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) U_s dB_s + \int_0^t F'(X_s) V_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) U_s^2 ds, \quad t \geq 0,$$

Für einen adaptierten Prozess $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ mit $YU, \sqrt{|YV|} \in \mathcal{P}^2_{\text{loc}}[0,T]$ für alle $T \geq 0$ ist das Integral bezüglich des Itô-Prozesses X erklärt durch

$$(Y.X)_t = \int_0^t Y_s dX_s := \int_0^t Y_s V_s ds + \int_0^t Y_s U_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

1. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Itô-Prozess mit Diffusionskoeffizient U und Drift V. Zeigen Sie unter Verwendung der Itô-Formel, dass dann für jede reellwertige Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ der Prozess $f(X_t)$ ebenfalls ein Itô-Prozess ist.

2. Seien $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ Itô-Prozesse mit Diffusionskoeffizienten U bzw. $\overline{U}$ und Drift V bzw. $\overline{V}$. Zeigen Sie, dass X nach Y und Y nach X integrierbar ist sowie die Formel der *partielle Integration*:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t U_s \overline{U}_s ds \quad \text{f.s.}$$

   Hinweis: Zeigen Sie diese Gleichung zunächst für $X = Y$ mit Hilfe der Itô-Formel und verwenden Sie dann Polarisation, d.h.

$$XY = \frac{1}{2}\big((X+Y)^2 - X^2 - Y^2\big).$$

3. Sei $U \in \mathcal{P}^2_{\text{loc}}$ und $X_t := \int_0^t U_s dB_s$, $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann der Prozess

$$M_t := X_t^2 - \int_0^t U_s^2 ds, \quad t \geq 0,$$

   ein stetiges lokales Martingal ist.

4. Seien $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ Itô-Prozesse mit Diffusionskoeffizienten U bzw. $\overline{U}$ und Drift V bzw. $\overline{V}$. Zeigen Sie, dass das sogenannte *Stratonovich-Integral*

$$\int_0^t X \circ dY := (X.Y)_t + \frac{1}{2}\int_0^t U_s \overline{U}_s ds, \quad t \geq 0,$$

für $f \in C^3(\mathbb{R})$ die Gleichung

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X) \circ dX \quad \text{f.s.} \quad t \geq 0,$$

erfüllt, d.h. das Stratonovich-Integral erfüllt die *gewohnten* Regeln der Integralrechung.

Hinweis: Verwenden Sie die Itô-Formel für f' um den benötigten Diffusionskoeffizienten von $f'(X)$ zu bestimmen, setzen dann in die Definition des Stratonovich-Integrals ein und verwenden Sie ein zweites Mal die Itô-Formel.