Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 2

1. Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen der Binomial-, negativen Binomial- sowie der Poissonverteilung.

2. Es sei X eine $\mathrm{N}(m, C)$ verteilte Zufallsvariable mit $m \in \mathbb{R}^n$ und $C = B^T B$ für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass X dann die Dichte
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} e^{-\frac{(x-m)^T C^{-1}(x-m)}{2}}, \end{cases}$$
besitzt.

3. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Bezeichne mit
$$F^{\leftarrow}(x) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) > x\}, \quad x \in [0,1]$$
die verallgemeinerte Inverse von F. Sei weiters U eine gleichverteilte reellwertige Zufallsvariable auf $[0,1]$. Zeigen sie, dass $F^{\leftarrow}(U)$ die gleiche Verteilung besitzt wie X.

4. Zeigen Sie, dass auf $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$, wobei λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$ bezeichnet, eine Folge von unabhängig identisch verteilten reellwertigen Zufallsvariablen existiert, sodass
   (a) die Wahrscheinlichkeit an den Stellen 0 und 1 gleich $\frac{1}{2}$ ist;
   (b) die Zufallsvariablen gleichverteilt auf $[0,1]$ sind;
   (c) eine beliebige Verteilungsfunktion F beistzen.

   Hinweis: (a) Jede Zahl $\omega \in [0,1]$ besitzt eine Binärdarstellung der Form $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(\omega) 2^{-n}$, mit $\varepsilon_n(\omega) \in \{0,1\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{N}\}$.
   (b) Überlegen Sie sich, dass es ein doppelt indizierte Folge von u.i.v. Zufallsvariablen $\{\varepsilon_{k,j} : (k,j) \in \mathbb{N}^2\}$ gibt mit den Eigenschaften aus (a) und betrachten Sie dann $\xi_k = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \varepsilon_{k,j}$.

5. Zeigen Sie, dass es auf dem Raum $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$ keine Familie von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen $\{X_t : t \in [0,1]\}$ mit nicht-ausgearteter Verteilung gibt.
   Hinweis: Sei $A \subseteq \mathfrak{B}([0,1])$ mit $\lambda(X_t \in A) \in (0,1)$ für alle $t \in [0,1]$. Betrachten Sie dann für $t \neq s$ die Funktion $\mathbf{1}_{X_t \in A} - \mathbf{1}_{X_s \in A}$. Verwenden Sie, dass $L^2([0,1])$ separabel ist.