Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 3

1. Zeigen Sie, dass es auf dem Raum $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$ keine Familie von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen $\{X_t : t \in [0,1]\}$ mit nicht-ausgearteter Verteilung gibt.
   Hinweis: Sei $A \subseteq \mathfrak{B}([0,1])$ mit $\lambda(X_t \in A) \in (0,1)$ für alle $t \in [0,1]$. Betrachten Sie dann für $t \neq s$ die Funktion $\mathbf{1}_{X_t \in A} - \mathbf{1}_{X_s \in A}$. Verwenden Sie, dass $L^2([0,1])$ separabel ist.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine $\mathrm{N}(m_n, C_n)$ verteilte Zufallsvariable, $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Zufallsvariable und gelte $X_n \xrightarrow{d} X$. Dann existieren die Grenzwerte $m := \lim_{n\to\infty} m_n$ sowie $C := \lim_{n\to\infty} C_n$. Weiters ist C positiv semidefinit und es gilt $X \sim \mathrm{N}(m, C)$.
   Was kann man sagen wenn statt $X_n \xrightarrow{d} X$ die Folge im L^2-Sinn konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\|X_n - X\|^2) = 0$?
   Hinweis: Für den letzten Teil überlege man sich die Abschätzung $|e^{itx} - e^{ity}| \leq |t| \cdot |x - y|$ für $t, x, y \in \mathbb{R}$.

3. Sei X eine $\mathrm{N}(0,1)$ Zufallsvariable. Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M_X(s) := \mathbb{E}(e^{sX})$, $s \in \mathbb{R}$, von X und geben Sie an wo diese existiert. Rechtfertigen Sie weiters, wie man daraus die charakteristische Funktion φ_X von X bekommt.

4. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ affin, d.h. $f(y) = Ay + a$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $a \in \mathbb{R}^d$, und ist $Y \sim \mathrm{N}(m, C)$, dann gilt $f(Y) \sim \mathrm{N}(Am + a, ACA^T)$.

5. Seien $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine quadratisch integrierbare $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable und $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mathbb{V}\big((t, X)\big) = \sum_{i=1}^n t_i^2 \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1,\ldots,n \\ i<j}} t_i t_j \operatorname{COV}(X_i, X_j) = \\ = \sum_{i,j=1}^n t_i t_j \operatorname{COV}(X_i, X_j).$$