Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 4

1. Zeigen Sie, dass die Verteilung eines Gauß-Prozesses $X = (X_t)_{t\in T}$ eindeutig festgelegt ist durch die Funktionen $t \mapsto \mathbb{E}(X_t)$ und $(s,t) \mapsto \mathrm{COV}(X_s, X_t)$, $s, t \in T$.

2. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, dann sind auch die Prozesse

   (a) $X := -B$,

   (b) $X_t := B_{s+t} - B_s$ für $t \geq 0$ und ein festes $s \geq 0$,

   (c) $X_t := \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ für $t \geq 0$ und ein festes $c > 0$,

   (d) $X_t := B_T - B_{T-t}$ für $0 \leq t \leq T$ und ein festes $T > 0$

   Brownsche Bewegungen.

3. Zeigen Sie, dass es einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ gibt mit $\mathbb{E}(X_t) = 0$, $t \geq 0$, und $\rho(s,t) = s \wedge t$, $s, t \geq 0$, der keine Brownsche Bewegung ist.

4. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $X_t := B_t - tB_1$, $t \in [0,1]$. Ein Prozess auf $[0,1]$ mit der gleichen Verteilung wie X heißt auch *Brownsche Brücke*. Zeigen Sie, dass X ein Gauß-Prozess ist und bestimmen Sie die Kovarianzfunktion.

5. Sei $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Brücke und ξ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable die unabhängig von X ist. Zeigen Sie, dass $B_t = X_t + t\xi$, $t \in [0,1]$, eine Brownsche Bewegung auf $[0,1]$ ist.

6. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass dann auch der Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$X_t := \begin{cases} 0 & t = 0, \\ tB_{\frac{1}{t}} & t > 0, \end{cases}$$

   eine Brownsche Bewegung ist.
   Hinweis: Um die fast sichere Stetigkeit an der Stelle $t = 0$ zu zeigen, überlegen Sie sich, dass $\lim_{\substack{t\downarrow 0 \\ t\in\mathbb{Q}}} X_t = 0$ fast sicher.

7. Sei X eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > n)$$

   konvergent ist.