Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 5

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Teilmenge. Eine *Filtration* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ auf T ist eine nichtfallende Familie von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{A}$, d.h. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$ für alle $s, t \in T$ mit $s \leq t$. Man spricht auch von einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$.
Eine Zufallsvariable τ mit Werten in $\overline{T} := T \cup \{\sup T\}$ heißt *Stoppzeit (bezüglich der Filtrierung $\mathcal{F}$)*, falls $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für jedes $t \in T$.
Für einen sotchastischen Prozess X auf T bezeichnet $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$, wobei $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\{X_s : s \in T, s \leq t\})$ für $t \in T$, die *von X erzeugte Filtrierung auf T*.

1. Es sei $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess und $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in [0,T]}$ die von X erzeugte Filtration auf $[0,T]$. Zeigen Sie, dass dann $(X_t)_{t \in [0,T]}$ unabhängige Zuwächse besitzt genau dann, wenn $X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s^X$ ist für alle $0 \leq s \leq t \leq T$.

2. Zeigen Sie die Pfade der Brownschen Bewegung, d.h. die Abbildungen $f_\omega : t \mapsto B_t(\omega)$ für $\omega \in \Omega$, f.s. nirgends differenzierbar sind.
   Hinweis: Nehmen Sie an es gibt ein $\omega_0 \in \Omega$, sodass der Pfad $f_{\omega_0} : t \mapsto B_t(\omega_0)$ differenzierbar an der Stelle $s \in [0, \infty)$ ist. Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $|B_t(\omega_0) - B_s(\omega_0)| \leq l|t - s|$ für alle t in einer gewissen Umgebung von s, und daher $|B_{(j+1)/n}(\omega_0) - B_{j/n}(\omega_0)| \leq 7l/n$ für $j \in \{i, i+1, i+2\}$ mit $i := \lceil ns \rceil$ und hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist ω_0 in der Menge
   $$N := \bigcup_{k,l,m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=kn-n+1}^{kn} \bigcap_{j=i}^{i+2} \Big\{\omega \in \Omega : \ |B_{(j+1)/n}(\omega) - B_{j/n}(\omega)| \leq \frac{7l}{n}\Big\}.$$
   Zeigen Sie, dass N die abzählbare Vereinigung von Null-Mengen ist.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Für jede Stoppzeit τ ist das Mengensystem
   $$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}$$
   eine σ-Algebra.
   (b) Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^+$ mit $\tau(\omega) = t$ für alle $\omega \in \Omega$ eine Stoppzeit und es gilt $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

4. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum Raum. Dann gilt für beliebige Stoppzeiten σ und τ
   (a) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.
   (b) $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$ auf $\{\tau = t\}$ für alle $t \in T$.
   (c) $\mathcal{F}_\sigma \cap \{\sigma \leq \tau\} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.