Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 6

1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass B_t und $B_t^2 - t$, $t \geq 0$, Martingale sind.
   Bemerkung: Bekanntlich ist t die quadratische Variation der Brownschen Bewegung. Allgemeiner kann man für jedes stetige (lokale) Martingal M den quadratischen Variationsprozess $[M]$ definieren und es gilt stets, dass $M^2 - [M]$ ein stetiges (lokales) Martingal ist.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) < \delta$ folgt $\mathbb{E}[|\xi|; A] < \varepsilon$. Dabei ist $\mathbb{E}[|\xi|; A] := \int_A |\xi| d\mathbb{P}$.
   Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt und verwenden Sie den Satz von Borel–Cantelli sowie das Lemma von Fatou.

3. Sei T eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass $M_t := \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$, $t \in T$, ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Dabei nennt man eine Famlie von Zufallsvariablen ζ_t, $t \in T$, gleichgradig integrierbar falls
   $$\lim_{r\to\infty} \sup_{t\in T} \mathbb{E}[|\zeta_t|; |\zeta_t| > r] = 0.$$
   Hinweis: Verwenden Sie die Markov–Ungleichung und Beispiel 2.

4. Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathfrak{L}([0,1])$ die σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen auf $[0,1]$[1], und $\mathbb{P}$ die Einschränkung des Lebesguemaßes auf $[0,1]$.
   Zeigen Sie, dass
   $$\mathcal{F} := \{A \in \mathfrak{L}([0,1]) :\ 1 - A = A\ \mathbb{P}\text{-f.s.}\}$$
   eine σ-Algebra ist.
   Bemerkung: Für $A, B \in \mathcal{A}$ ist $1 - A = \{\omega \in \Omega :\ \omega = 1 - \omega', \omega' \in A\}$ und $A = B$ $\mathbb{P}$-f.s. genau dann, wenn $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0$. Also enthält $\mathcal{G}$ Mengen die symmetrisch bezüglich $\frac{1}{2}$ sind.

[1] $\mathfrak{L}([0,1])$ ist die Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}([0,1])$ bezüglich des Lebesguemaßes $\lambda|_{[0,1]}$