Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 7

1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra. Dann ist die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ bis auf fast sichere Gleichheit die einzige Zufallsvariable $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, für welche der Erwartungswert
$$\mathbb{E}\big((X-Z)^2\big)$$
seinen kleinstmöglichen Wert annimmt.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gilt
$$\mathbb{E}\big((X-Y)^2\big) - \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2\big) = \mathbb{E}\big((\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]-Y)^2\big).$$

2. Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathfrak{L}([0,1])$ die σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen auf $[0,1]$, $\mathbb{P}$ die Einschränkung des Lebesguemaßes auf $[0,1]$ und $\mathcal{F} := \{A \in \mathfrak{L}([0,1]) : \; 1 - A = A \; \mathbb{P}\text{-f.s.}\}$ die σ-Algebra aus Beispiel 4 der 6.Übung. Zeigen Sie, dass für $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gilt $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ genau dann, wenn $Y(\omega) = Y(1-\omega)$ $\mathbb{P}$-f.s. und, dass für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gilt
$$E^{\mathcal{F}}X(\omega) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})(\omega) = \frac{1}{2}\big(X(\omega) + X(1-\omega)\big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$
Gilt diese Formel auch für $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$?

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ und die σ-Algebra $\mathcal{F}$ wie in Beispiel 2 und $\mathbb{P}(A) := 2\int_A \omega d\lambda(\omega)$, $A \in \mathcal{F}$, wobei λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gilt
$$E^{\mathcal{F}}X(\omega) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})(\omega) = \omega X(\omega) + (1-\omega)X(1-\omega) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$
Gilt diese Formel auch für $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$?