Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Stochastische Analysis für Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (WS 2011)

Blatt 8

1. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge und seien $X = (X_t)_{t \in T}$ und $Y = (Y_t)_{t \in T}$ zwei stochastische Prozesse. Man nennt X eine *Version* (oder *Modifikation*) von Y, wenn für jedes $t \in T$ gilt, dass $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$. Die Prozesse X und Y heißen *ununterscheidbar*, falls es ein $N \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mathbb{P}(A) = 0$ und $\{X_t \neq Y_t\} \subseteq N$ für jedes $t \in T$.

   (a) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Ununterscheidbarkeit die stärkere Bedingung ist.

   (b) Zeigen Sie, dass für (rechts-)stetige Prozesse $X = (X_t)_{t \geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ die beiden Begriffe zusammenfallen, d.h. aus X ist eine Version Y folgt bereits X und Y sind ununterscheidbar.

2. Sei $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal, dass im L^1 gegen eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable konveriert. Zeigen Sie, dass es dann eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable $M_\infty \in L^1$ gibt, sodass

$$M_n = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_n], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

   Gilt eine vergleichbare Aussage auch für stetige Martingale $M = (M_t)_{t \geq 0}$?

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} (\mathcal{M}^2, \|.\|_{\mathcal{M}^2}) \to (L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}), \|.\|_2), \\ X = (X_t)_{t \geq 0} \mapsto X_\infty, \end{cases}$$

   eine lineare Isometrie ist, wenn Sie ununterscheidbare Elemente in $\mathcal{M}^2$ mit einander identifizieren. Mit dieser Auffassung wird $(\mathcal{M}^2, \|.\|_{\mathcal{M}^2})$ zu einem normierten Raum.

4. Sei X ein integrierbarer $\mathcal{F}$-adaptierter Prozess auf $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass es eine f.s. eindeutige Zerlegung $M + A$ gibt, wobei M ein $\mathcal{F}$-Martingal ist und $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess ist mit $A_0 = 0$ und A_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$.